



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

Cuerpo Académico de Telecomunicaciones

Análisis Comparativo de Diferentes Clases de Modelos de Sumas de Cisoides para la Simulación de Canales Inalámbricos Móviles

TESIS

para obtener el grado de:

Maestría en Ingeniería Electrónica
con Orientación en Telecomunicaciones

Presenta:

Sr. José Trinidad Gutiérrez Mena

© José Trinidad Gutiérrez Mena, 2014

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

Cuerpo Académico de Telecomunicaciones

Los miembros del comité de tesis recomiendan la aceptación de la tesis de José Trinidad Gutiérrez Mena como un cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de:

Maestría en Ingeniería Electrónica

con Orientación en Telecomunicaciones

Dr. Carlos Adrián Gutiérrez Díaz
de León
Asesor

Dr. Javier Flavio Viguera Gómez
Co-asesor

Dr. Ulises Pineda Rico
Sinodal

Dr. Edgar Arce Santana
Sinodal

Dra. Elvia Ruth Palacios
Hernández
Sinodal

Con cariño y amor:

A mi esposa e hija, Robertha y Keyla Sofía
a mis padres, José Trinidad y María del Rosario
a mis hermanos, Juan Pablo y Eduardo

....

Agradecimientos

A Dios, pues a Él le debo todo cuanto tengo.

A mis padres, José Trinidad y María del Rosario, por todo el amor, sacrificio y su apoyo incondicional, por sus consejos que siempre estuvieron en el momento justo y que me ayudaron a enfrentar situaciones difíciles en las que flaqueaba mi ánimo. Me enorgullece y me siento sumamente afortunado de tenerlos como padres. Los admiro y respeto profundamente, gracias por ayudarme a realizar mis sueños más anhelados.

A mis hermanos, Juan Pablo y Eduardo, por su amor y compañía, por su complicidad y porque me han respaldado siempre. No los cambiaría por nada.

A mi esposa, Robertha, por todo el amor, cariño y paciencia que tienes para conmigo, por brindarme tu apoyo y consejo los cuales me han ayudado a superarme profesionalmente pero sobre todo como persona, por compartir este sueño desde el comienzo de la maestría cuando apenas éramos novios, gracias por estar siempre a mi lado. Te amo.

A mi hija, Keyla Sofía, por ser mi motivación en esta etapa de Maestría.

A mis tíos, tías y primos, en especial a mi tío Catarino y mi tía Martha por abrirme las puertas de su casa y por todos los momentos que hemos compartido juntos. También agradezco a mis abuelos Julia, José Trinidad y Socorro.

Estoy muy agradecido con mi asesor, Dr. Carlos Adrián Gutiérrez Díaz de León. Gracias por compartir sus conocimientos conmigo y estar siempre al pendiente de mí, su guía fue decisiva en el logro de este proyecto. Lo admiro y respeto tanto en el plano profesional como en el personal. Agradezco también a mi co-asesor, Dr. Javier Flavio Vigueraz Gómez. Por el apoyo brindado en este trabajo de tesis. Gracias a ambos por brindarme la oportunidad de ser su colaborador y por el acercamiento que tuvieron para conmigo.

Agradezco el apoyo financiero a CONACyT por la beca proporcionada (CVU/Becario): 442869/269195.

Este trabajo de investigación fue financiado en parte por la Secretaría de Educación Pública a través del Programa para el Mejoramiento del Profesorado (PROMEP/103.5/12/3953).

José Trinidad Gutiérrez Mena

*Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Enero 2014*

Análisis Comparativo de Diferentes Clases de Modelos de Sumas de Cisoides para la Simulación de Canales Inalámbricos Móviles

José Trinidad Gutiérrez Mena
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2014

Resumen

Muchos modelos de simulación para canales inalámbricos basados en suma de cisoides han sido propuestos en la literatura, sin embargo, todos ellos han sido analizados considerando sus propiedades teóricas. Por ejemplo, suponen que la simulación del canal se lleva a cabo dentro de un intervalo de observación de longitud infinita, lo cual no es práctico.

En este trabajo de investigación, se analizan las propiedades estadísticas como la estacionariedad en el sentido amplio, ergodicidad en media y ergodicidad en la función de autocorrelación de modelos de simulación de suma de cisoides bajo restricciones prácticas. Específicamente, se considera el caso en el que la longitud de las formas de onda generadas por el modelo de simulación es finita. Uno de los propósitos de este análisis es determinar cuáles de las clases de modelos de simulación de canal poseen dichas propiedades. Otro de los propósitos es analizar los efectos que produce el limitar la longitud de las formas de onda generadas por el simulador a un valor finito.

Por ello, aplicando las restricciones prácticas a los simuladores, analizamos las degradaciones que sufre la función de autocorrelación temporal de simuladores ergódicos y no ergódicos caracterizando el error instantáneo. De lo cual, la principal conclusión a la que llegamos fue que los simuladores ergódicos tienen mejor desempeño sobre los simuladores no ergódicos tanto en la teoría como en la práctica.

Los resultados de nuestra investigación se pueden aplicar, por ejemplo, al análisis de laboratorio de sistemas de comunicaciones inalámbricos móviles modernos y como guía para el correcto diseño de simuladores de canal.

Índice General

Lista de Figuras	v
Lista de Tablas	vii
Lista de Acrónimos	ix
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Importancia de los Simuladores de Canal	1
1.1.2. Propiedades de Estacionariedad y Ergodicidad de los Simuladores de Canal	2
1.1.3. Simuladores de Canal basados en Procesos de Suma de Cisoides	3
1.2. Planteamiento del Problema	5
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivo General	6
1.3.2. Objetivos Específicos	6
1.4. Metodología	6
1.5. Contribuciones del Trabajo de Investigación	7
1.6. Organización del Manuscrito	7
Capítulo 2. Modelado del Canal	9
2.1. Introducción	9
2.2. Descripción del Modelo de Canal de Referencia	10
2.3. Caracterización Estadística del Modelo de Canal de Referencia	12
2.3.1. Estadísticas de Primer Orden	12
2.3.2. Estadísticas de Segundo Orden	16
2.4. Extensión del Modelo para otro tipo de Canales	18
2.4.1. Canal Rician	19
2.4.2. Canal Nakagami	20
2.4.3. Canales de Banda Ancha	22
2.5. Conclusiones	23

Capítulo 3. Clases de Modelos de Simulación de Canal de SOC	25
3.1. Introducción	25
3.2. Clasificación de los Modelos de Simulación de Canal de SOC	26
3.3. Análisis de las Propiedades Estadísticas de los Modelos de Simulación de Canal de SOC	27
3.3.1. Consideraciones para las Fases, Frecuencias y Ganancias de los Modelos de SOC	28
3.3.2. Definición de un Proceso WSS, ME y AE	28
3.3.3. Análisis de las Propiedades de AE, ME y WSS de los Modelos de Simulación de Canal de SOC	29
3.4. Métodos de Parametrización Importantes para Simuladores de Canal de SOC	43
3.4.1. Generalidades de los Métodos de Parametrización para Simuladores de Canal de SOC	44
3.5. Análisis de la Precisión del Método de Parametrización RSM	45
3.6. Conclusiones	49
Capítulo 4. Análisis de la Clases de Simuladores de SOC bajo Restricciones Prácticas	51
4.1. Introducción	51
4.2. Modelos de Simulación de Canal de SOC Ergódicos y no Ergódicos	53
4.2.1. Modelo de Simulación Ergódico	53
4.2.2. Modelo de Simulación no Ergódico	54
4.3. Análisis del Error Instantáneo en la Estimación de la TACF de Simuladores Ergódicos y no Ergódicos Aplicando el BE y el UE	55
4.3.1. Cálculo del Error Instantáneo del BE	55
4.3.2. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el BE para Simuladores Ergódicos	57
4.3.3. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el BE para Simuladores no Ergódicos	59
4.3.4. Cálculo del Error Instantáneo del UE	61
4.3.5. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el UE para Simuladores Ergódicos	63
4.3.6. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el UE para Simuladores de SOC no Ergódicos	64
4.4. Resultados	64
4.5. Conclusiones	77
Capítulo 5. Conclusiones y Problemas Abiertos	79
5.1. Conclusiones	79
5.2. Problemas Abiertos	80

ÍNDICE GENERAL

III

Bibliografía

81

Lista de Figuras

1.1.	Diagrama a bloques del modelo de simulación convencional SOS.	3
1.2.	Envolvente de la forma de onda generada por un modelo de simulación de canal de SOC.	5
1.3.	Fase de la forma de onda generada por un modelo de simulación de canal de SOC.	5
2.1.	Escenario de un radio canal móvil.	10
2.2.	Componente de onda típico.	11
2.3.	PDF de la envolvente de la forma de onda del modelo de referencia con distintos valores de σ_{μ}^2	14
2.4.	PDF de la fase de la forma de onda del modelo de referencia.	14
2.5.	ACF del modelo de referencia cuando la PDF del AOA es uniforme.	18
2.6.	PDF Rician con diferentes valores de media (ρ) y varianza (σ_{μ}^2).	20
2.7.	PDF Nakagami con diferentes valores de media (ρ) y varianza (σ_{μ}^2).	22
2.8.	Diagrama a bloques de un modelo multitrayectoria (modelo TDLM) para canales de banda ancha.	23
3.1.	Diagrama a bloques de un modelo de simulación de SOC.	27
3.2.	Comparativa entre el error real y el error estimado aplicando suma de Riemann.	49
4.1.	Ejemplo de las degradaciones en la TACF al restringir la duración de T	52
4.2.	Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el BE.	66
4.3.	Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el UE.	67
4.4.	Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el BE.	68
4.5.	Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el UE.	69
4.6.	Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el BE y el UE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$	70
4.7.	Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el BE y el UE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$	71

4.8.	Varianza del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$	72
4.9.	Varianza del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC no AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$	73
4.10.	Norma del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$	74
4.11.	Norma del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC no AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$	75

Lista de Tablas

3.1. Clasificación de los modelos de simulación de SOC con respecto al tipo de parámetros de los cisoides.	27
3.2. Clases de modelos de simulación de canal de SOC y sus propiedades de estacionariedad y ergodicidad.	43

Lista de Acrónimos

3GPP	3rd Generation Partnership Project
ACF	Autocorrelation Function
AE	Autocorrelation Ergodic
AOA	Angle of Arrival
BE	Biased Estimator
BRSM	Basic Riemann Sum Method
DPSD	Doppler Power Spectral Density
GMEA	Generalized Method of Equal Areas
IQ	In phase Quadrature
LOS	Line of Sight
LPNM	LP Norm Method
ME	Mean Ergodic
MEA	Method of Equal Areas
MEDS	Method of Exact Doppler Spread
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MSE	Mean Square Error
PDF	Probability Density Function
RSM	Riemann Sum Method
SISO	Single Input Single Output
SOC	Sum of Cosoids
SOS	Sum of Sinusoids
TACF	Temporal Autocorrelation Function
TDLM	Tapped Delay Line Model
TMV	Temporal Mean Value
TSI	Time Shift Insensitive
UE	Unbiased Estimator
WSS	Wide Sense Stationary

Capítulo 1

Introducción

En este Capítulo se presentan los antecedentes, planteamiento del problema, objetivos y metodología del proyecto de tesis. Se hace énfasis en la importancia y las propiedades de los simuladores de canal, específicamente en los basados en procesos de suma de cisoides (SOC, por sus siglas en Inglés). También se mencionan las principales contribuciones de este proyecto de tesis y finalmente se explica brevemente la organización del manuscrito.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Importancia de los Simuladores de Canal

El diseño de simuladores computacionales adecuados para la evaluación de los sistemas de comunicaciones móviles se ha convertido en una línea de investigación de interés general, debido en parte a la demanda que existe entre los ingenieros en telecomunicaciones por este tipo de herramientas, así como a la proliferación y bajo costo de dispositivos electrónicos con altas capacidades de cálculo numérico. De hecho, la simulación es un lenguaje bien conocido en el mundo industrial, ya que juega un papel importante en la evaluación de sistemas inalámbricos [1]. Uno de los elementos fundamentales de cualquier simulador computacional que se utiliza para evaluar las prestaciones de un sistema de comunicaciones inalámbrico es el modelo matemático que se emplea para simular al canal. Este elemento es sumamente importante, ya que la mayoría de los problemas que afectan el rendimiento de los sistemas de comunicaciones inalámbricos, como la pérdida de potencia en la señal, sombreado, la interferencia entre símbolos y la modulación cruzada, son causados por el canal de propagación [2]. Es tal la importancia del bloque de simulación, que la organización Proyecto Asociación de Tercera Generación (3GPP, por sus siglas en Inglés) publicó un documento con especificaciones para diseñar correctamente simuladores de canal [3].

Existen diferentes enfoques para el diseño de simuladores de canal, tales como los descritos en [4–8]. Si bien la metodología puede variar, el objetivo de todos los simuladores de canal es el mismo: Sintetizar un proceso aleatorio cuyas realizaciones se pueden reproducir de manera eficiente sobre una plataforma de software o hardware bajo la restricción de que

sus propiedades estadísticas se asemejen a las de un canal de referencia no realizable. Un modelo de canal de referencia típico es el modelo de canal Gaussiano complejo propuesto por Clarke en [9]. Este modelo de canal, como la gran mayoría de modelos de propagación de referencia, no es realizable en el sentido de que no es posible sintetizar un proceso estocástico Gaussiano con exactitud [10].

1.1.2. Propiedades de Estacionariedad y Ergodicidad de los Simuladores de Canal

Dos propiedades deseables de cualquier modelo de simulación de radio canales multi-trayecto son la estacionariedad y la ergodicidad. Estas propiedades permiten al simulador de canal emular con exactitud los promedios de ensamble del canal en una sola ejecución (ergodicidad) sin requerir información sobre el instante de tiempo donde comienza la simulación (estacionariedad). De hecho, un aspecto importante en la caracterización estadística de un simulador de canal consiste en determinar si el modelo de simulación es un proceso aleatorio estacionario en el sentido amplio (WSS, por sus siglas en Inglés), ergódico en la media (ME, por sus siglas en Inglés) y ergódico en la función de autocorrelación (AE, por sus siglas en Inglés).

En el sentido estricto, un simulador de canal es estacionario si todas las funciones de densidad de probabilidad marginales y conjuntas del proceso aleatorio que caracterizan al modelo de simulación son invariantes en el tiempo [11]. Por otro lado, un simulador de canal es ergódico si los promedios temporales del modelo de simulación son iguales a sus promedios de ensamble [11]. Estas condiciones difícilmente se pueden cumplir en la práctica. Sin embargo, la información acerca de las estadísticas de tercer orden o de orden superior rara vez se requieren en la evaluación del rendimiento de sistemas de comunicaciones inalámbricos. Por ello, para propósitos prácticos, es suficiente si el simulador de canal es WSS, ME y AE.

La importancia de las propiedades de ergodicidad y estacionariedad se hace evidente si consideramos los simuladores que no poseen estas propiedades. En el caso de un simulador no ergódico es necesario realizar múltiples experimentos y promediar los resultados para poder observar las estadísticas del ensamble de manera correcta. Por otra parte, si el simulador es no estacionario, entonces es fundamental definir exactamente el tiempo en el que se lleva a cabo la simulación ya que los resultados variarán de un instante de tiempo a otro. Es por ello, que cuando un simulador carece de estas propiedades la simulación se vuelve más compleja, mientras que cuando posee las propiedades de ergodicidad y estacionariedad la simulación se simplifica.

1.1.3. Simuladores de Canal basados en Procesos de Suma de Cisoides

Entre la variedad de modelos de simulación de canal propuestos en la literatura [4, 7, 12–15], los basados en el principio de suma de sinusoides (SOS, por sus siglas en Inglés), presentado por Rice en [16, 17], se han usado ampliamente en los últimos años como base para el diseño de simuladores de radio canales multitrayecto [18–23]. La idea del principio de SOS consiste en combinar varias sinusoides de parámetros aleatorios para aproximar procesos de ruido coloreado, es decir, procesos que exhiben correlación en tiempo. En el enfoque convencional de SOS, se asume que los componentes en fase y cuadratura (IQ, por sus siglas en Inglés) de la envolvente compleja del canal son procesos Gaussianos estadísticamente independientes. Bajo esta consideración, la simulación de los componentes IQ del canal se lleva a cabo por medio de dos procesos de SOS mutuamente no correlacionados que tienen conjuntos de parámetros disjuntos: ganancias, frecuencias, fases y número de sinusoides. El modelo general de SOS puede ser descrito matemáticamente como

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{N_1} c_{1,n} \cos(2\pi f_{1,n}t + \theta_{1,n}) + j \sum_{k=1}^{N_2} c_{2,k} \cos(2\pi f_{2,k}t + \theta_{2,k}), \quad j = \sqrt{-1} \quad (1.1)$$

donde $c_{i,n;k}$, $f_{i,n;k}$ y $\theta_{i,n;k}$ son las ganancias, frecuencias Doppler y fases de las sinusoides, respectivamente y N_i es el número de sinusoides en la parte real ($i = 1$) y en la parte imaginaria ($i = 2$) de $\mu(t)$, donde $i \in \{1, 2\}$. El diagrama a bloques del enfoque convencional de SOS se muestra en la Figura 1.1.

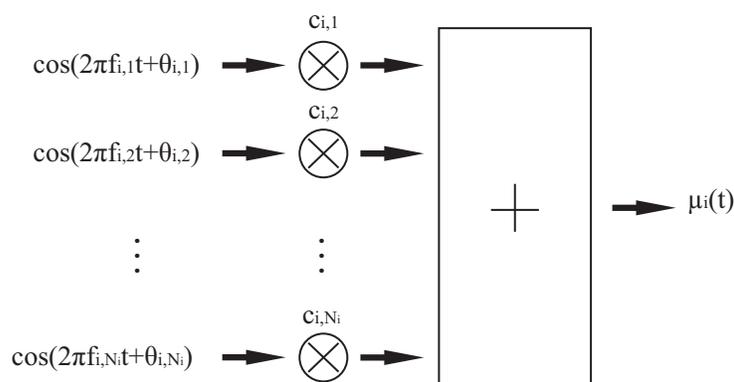


Figura 1.1: Diagrama a bloques del modelo de simulación convencional SOS.

El enfoque convencional de SOS ha sido aplicado durante más de cuatro décadas a la simulación de una variedad de canales móviles multitrayecto, que van desde canales simples de una entrada una salida (SISO, por sus siglas en Inglés) [19], hasta canales más sofisticados de múltiples entradas múltiples salidas (MIMO, por sus siglas en Inglés) [21].

Así mismo, el enfoque convencional de SOS puede ser aplicado fácilmente a la simulación de canales selectivos en frecuencia [24–26] y canales selectivos en espacio [27–30].

A pesar de su amplia aceptación, es importante notar que el enfoque convencional de SOS sufre de una seria limitación: Solamente puede ser usado para simular canales caracterizados por densidades de potencia espectral Doppler (DPSD's, por sus siglas en Inglés) simétricas con respecto al origen. Esta es una limitación importante, pues deja de lado el caso más realista que es cuando los canales tienen DPSD's asimétricas [31–34]. Los modelos de simulación para canales que tienen DPSD's asimétricas son necesarios para evaluar el rendimiento de sistemas de comunicaciones móviles bajo condiciones de dispersión no isotrópica [29, 35].

Una solución para superar esta limitación consiste en una versión simplificada del enfoque convencional de SOS que se obtiene aplicando la correspondencia de parámetros $c_{1,n} = c_{2,k}$, $f_{1,n} = f_{2,k}$ y $\theta_{1,n} = \theta_{2,k}$. El modelo de simulación que resulta es llamado modelo de suma finita de cisoides o modelo de SOC, presentado en [36], y es usado para simular la envolvente compleja del canal. Básicamente, los modelos de SOC difieren de los modelos convencionales de SOS en que los componentes IQ de los modelos de SOC están caracterizados por el mismo conjunto de parámetros [36]. Esta característica de los modelos de SOC permite la simulación de canales que tienen DPSD's simétricas y asimétricas [30, 37–39]. Otra característica importante de los modelos de SOC es que tienen un significado físico claro ya que están relacionados con el modelo electromagnético de ondas planas [20, 40–42]. Una fuente de ondas electromagnéticas como una antena produce un campo que es aproximadamente plano en una región de campo lejano. Es decir que, a una distancia muy alejada de la fuente, las ondas emitidas son aproximadamente planas y pueden considerarse como tal, lo que está en contraste con el modelo convencional de SOS ya que este no puede ser interpretado físicamente.

El modelo general de simulación de canal de SOC puede ser descrito, matemáticamente, por la siguiente Ecuación

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (1.2)$$

donde N es el número de cisoides, c_n , f_n y θ_n son las ganancias, las frecuencias Doppler y las fases de los cisoides, respectivamente.

Un ejemplo típico de la envolvente de la forma de onda de los modelos de simulación de canal de SOC se presenta en la Figura 1.2, la cual nos muestra un rasgo característico de un canal inalámbrico con desvanecimientos: La caída repentina de la amplitud. La fase de la forma de onda de los modelos de simulación de canal de SOC se muestra en la Figura 1.3, en ella podemos observar otro rasgo característico de un canal inalámbrico con desvanecimientos: La variación no lineal de la fase.

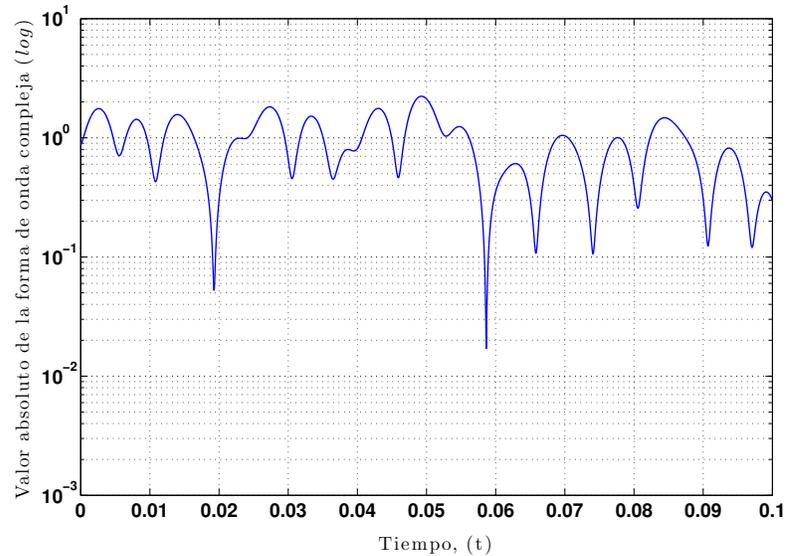


Figura 1.2: Envoltora de la forma de onda generada por un modelo de simulación de canal de SOC.

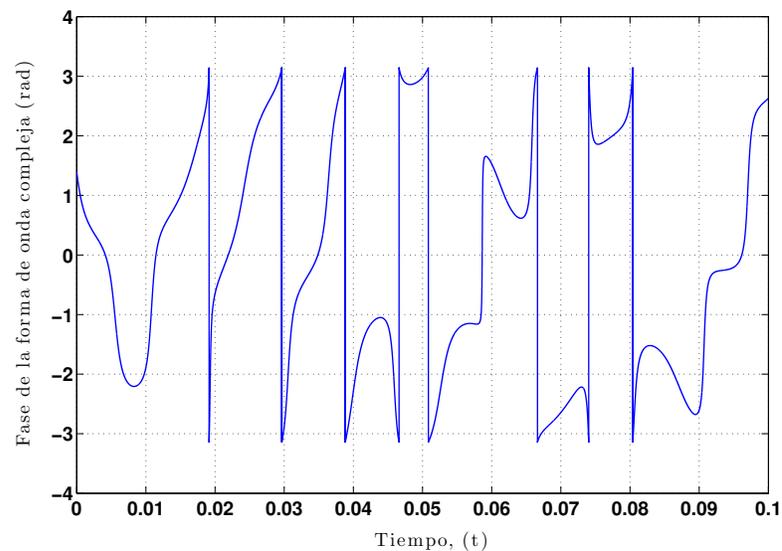


Figura 1.3: Fase de la forma de onda generada por un modelo de simulación de canal de SOC.

1.2. Planteamiento del Problema

En la literatura se han propuesto diferentes clases de modelos de simulación de radio canales multirrayecto basadas en procesos de SOC. De acuerdo al carácter aleatorio o determinista de los parámetros de los cisoides (c_n , f_n y θ_n) podemos identificar siete clases fundamentales de modelos estocásticos de simulación de SOC más una clase de modelos deterministas. Aunque las características de esas clases de simuladores de canal han sido analizadas y comparadas en numerosos artículos técnicos, los estudios que se han publicado

hasta ahora se han enfocado en las propiedades teóricas de los simuladores, las cuales, en la mayoría de los casos, son válidas bajo condiciones que no se pueden satisfacer en la práctica. En particular, recientemente se publicó un artículo en el que se analizan las propiedades de estacionariedad y ergodicidad de diferentes clases de modelos de SOC [43]. El estudio que se presenta en ese artículo se llevó a cabo considerando que la simulación del canal se realiza dentro de un intervalo de observación de longitud infinita, lo cual no es posible llevarlo en práctica, ya que las herramientas de cálculo con las que contamos para realizar la simulación efectúan cálculos finitos, por lo que se ve truncado el intervalo de observación a una longitud que es menor a infinito.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

En este trabajo de tesis se abordan dos principales líneas de investigación, una en el análisis de la precisión del método de parametrización conocido como Método de Suma de Riemann (RSM, por sus siglas en Inglés) y otra en el análisis y caracterización de las degradaciones que se observan cuando la longitud de las formas de onda generadas por el simulador de SOC es finita. En base a ello y con la finalidad de obtener resultados más realistas, esta tesis tiene como objetivo llevar a cabo un análisis comparativo de las diferentes clases de modelos de simuladores de canal de SOC teniendo en cuenta las limitaciones que surgen en la práctica durante la implementación y operación de un simulador computacional.

1.3.2. Objetivos Específicos

Para realizar la comparación entre las clases de modelos de SOC se analizará:

1. Los efectos que tiene limitar la longitud de las formas de onda generadas por el simulador en las propiedades de estacionariedad y ergodicidad del modelo de simulación.
2. Cuantificar la diferencia (el error) que se observa entre las propiedades de correlación temporales y de ensamble de los procesos de SOC [44].
3. Conocer las técnicas de parametrización de simuladores de canal de SOC más populares con la finalidad de entender el proceso de diseño de un simulador de canal [45].

1.4. Metodología

La metodología que se siguió para alcanzar los objetivos propuestos se apoya en herramientas analíticas basadas en la teoría de las comunicaciones, de la probabilidad y

estadística, de la teoría de señales y sistemas y de herramientas de simulación basadas en técnicas de Montecarlo. Además, se desarrollaron herramientas de simulación que se utilizaron para verificar la validez de los resultados analíticos obtenidos.

1.5. Contribuciones del Trabajo de Investigación

Como ya se mencionó anteriormente, nuestro trabajo de investigación toma en cuenta las limitantes que surgen al implementar los modelos de simulación de SOC. En base a ello, las principales contribuciones son:

- Un marco teórico para el análisis de las propiedades de estacionariedad y ergodicidad de los modelos de simulación de canal basados en el concepto de SOC considerando restricciones prácticas: Cuando la longitud de las formas de onda generadas por el simulador es finita.
- Un análisis comparativo del error entre las funciones de correlación de las funciones muestrales y de ensamble de procesos de SOC bajo restricciones prácticas.
- Un análisis cuantitativo de la precisión del método de parametrización de SOC conocido como RSM.

Los resultados obtenidos en este trabajo de investigación se pueden aplicar, por ejemplo, en el análisis de laboratorio de los sistemas de comunicaciones móviles modernos o como guía para el diseño eficiente de simuladores de canal.

1.6. Organización del Manuscrito

Este trabajo de investigación está organizado en 5 capítulos incluida la presente introducción. El esquema para el resto del manuscrito es el siguiente. En el Capítulo 2 se presenta el modelado del canal que se utiliza comúnmente como referencia para diseñar simuladores de canal y se explican algunos conceptos importantes relacionados al modelo de referencia. En el Capítulo 3 se analizan las clases de modelos de simulación de SOC y además se abordan las propiedades estadísticas teóricas que tienen estas clases. En el Capítulo 4 se hace un análisis de las clases de modelos de simulación de SOC bajo restricciones prácticas. Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las principales conclusiones de este trabajo de investigación.

Capítulo 2

Modelado del Canal

En este Capítulo se presenta una descripción del modelo de canal de referencia que se considera para el estudio que se realizó en este trabajo de investigación. Este modelo es comúnmente utilizado en la literatura para diseñar simuladores de canal multitrayecto. Se explican a detalle las estadísticas del canal que son de interés para el diseño de cualquier simulador de canal que se emplea para evaluar las prestaciones de sistemas de comunicaciones móviles, como la distribución de primer orden de la envolvente y de la fase, los valores promedio de primer orden como la media, la varianza y la potencia y los valores promedio de segundo orden como la función de autocorrelación. Además, como se explica más adelante, este modelo se puede extender fácilmente a otro tipo de canales importantes como Rician, Nakagami y canales de Banda Ancha.

2.1. Introducción

En las comunicaciones inalámbricas, la mayor parte de las veces, las ondas electromagnéticas emitidas por el transmisor no llegan a la antena receptora de forma directa debido a los obstáculos que bloquean el trayecto de línea de vista (LOS, por sus siglas en Inglés). De hecho, la señal recibida es una superposición de ondas que vienen de todas las direcciones a causa de fenómenos como la reflexión, la difracción, el sombreado y la dispersión causada por edificios, árboles y otros obstáculos [46]. A este efecto se le conoce como propagación por múltiples trayectos o propagación multitrayecto. Un escenario típico del radio canal móvil se muestra en la Figura 2.1. A consecuencia de la propagación multitrayecto, la señal recibida se constituye de una suma finita de réplicas de la señal transmitida. Dichas réplicas, llegan al receptor atenuadas, retrasadas y desfasadas, cada una influyendo a la otra. Dependiendo de la fase de cada onda, la superposición puede ser constructiva o destructiva, es decir, contribuir a la señal de tal manera que pueda recuperarse la información que se transmite a través de la onda o definitivamente corromper la señal evitando adquirir dicha información.

Además de la propagación multitrayecto, también el efecto Doppler tiene una influen-

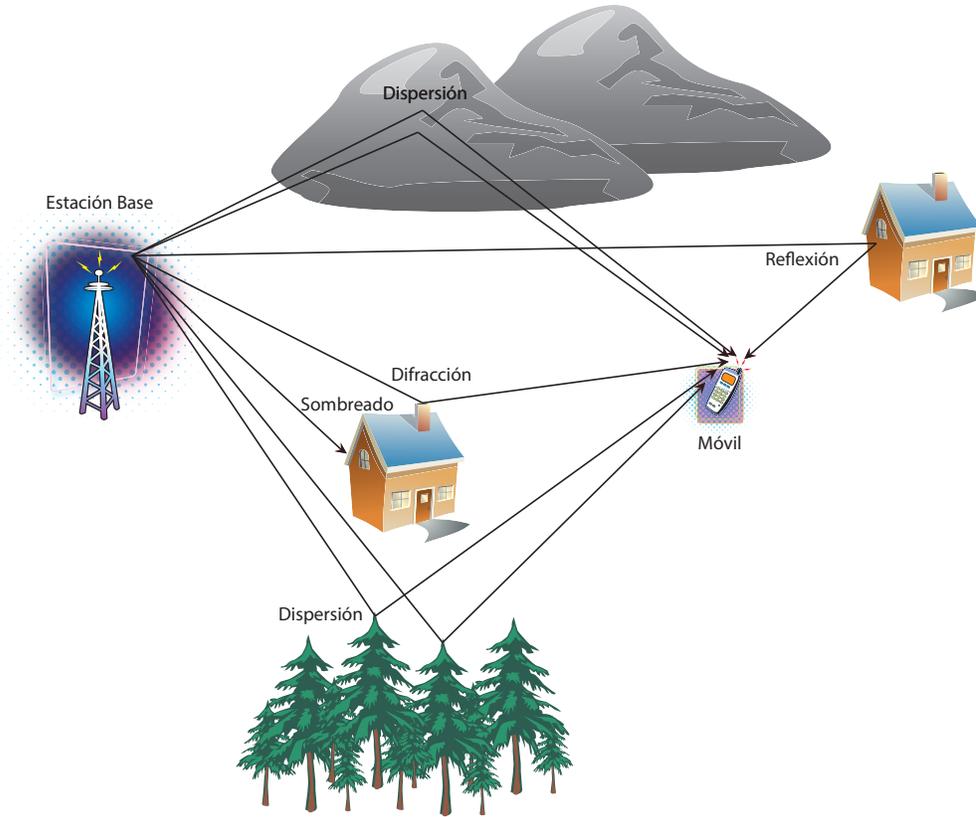


Figura 2.1: Escenario de un radio canal móvil.

cia negativa en las características de transmisión del radio canal móvil. Debido al movimiento del móvil, el efecto Doppler provoca un desplazamiento de frecuencia de cada una de las ondas. El ángulo de llegada (AOA, por sus siglas en Inglés) α_n , el cual está definido por la dirección de llegada de la n -ésima onda incidente y la dirección del movimiento del móvil como se muestra en la Figura 2.2, determina la frecuencia Doppler (desplazamiento de frecuencia) de la n -ésima onda incidente.

2.2. Descripción del Modelo de Canal de Referencia

El modelo de propagación que se toma como referencia es el modelo que propuso Clarke en [9]. En este modelo, Clarke considera la recepción de una señal desde un observador móvil que se desplaza sobre el eje x como se muestra en la Figura 2.2. De acuerdo con esto la envolvente compleja del canal se puede representar como la superposición de una serie de ondas planas viajando horizontalmente como [40]

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (2.1)$$

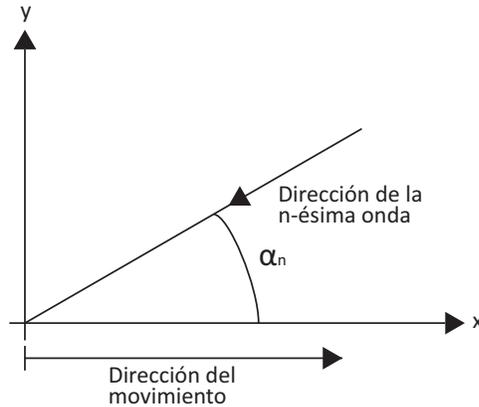


Figura 2.2: Componente de onda típico.

donde N es la n -ésima onda plana con una ganancia aleatoria \mathbf{c}_n , una frecuencia Doppler aleatoria \mathbf{f}_n y una fase aleatoria $\boldsymbol{\theta}_n$.

De acuerdo con el modelo de Clarke:

- Las fases $\boldsymbol{\theta}_n$ se definen como variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas sobre $[-\pi, \pi)$.
- \mathbf{c}_n es una variable aleatoria positiva y cumple que

$$E\{|\mathbf{c}_n|^2\} = \frac{\sigma_{\mu}^2}{N} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

donde σ_{μ}^2 es la potencia promedio del canal ($0 < \sigma_{\mu}^2 < \infty$). $E\{\cdot\}$ denota la esperanza matemática y $|\cdot|$ el valor absoluto.

- Las frecuencias Doppler \mathbf{f}_n son variables aleatorias obtenidas de la transformación

$$\mathbf{f}_n \triangleq f_{\max} \cos(\boldsymbol{\alpha}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

donde f_{\max} es el desplazamiento Doppler máximo debido al movimiento del receptor (componentes multitrayecto del canal) y es igual a $f_{\max} = \frac{v}{\lambda}$ (v es velocidad del móvil, λ es la longitud de onda) y $\boldsymbol{\alpha}_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) que describen el AOA de la n -ésima onda incidente y tienen una función de densidad de probabilidad (PDF, por sus siglas en Inglés) $p_{\alpha}(\alpha)$ donde $\alpha \in [-\pi, \pi)$.

- Todas las variables aleatorias en consideración ($\mathbf{c}_n, \boldsymbol{\theta}_n$ y $\boldsymbol{\alpha}_n$) son estadísticamente independientes.

En el caso particular en el que el número de ondas es suficientemente grande, siguiendo el modelo de propagación por dispersión propuesto por Clarke para ambientes de propagación móvil de dos dimensiones [9] e invocando el teorema del límite central [11,47], podemos decir que el proceso $\boldsymbol{\mu}(t)$ es igual a

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp(j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)) \quad (2.4)$$

y tiende a un proceso Gaussiano complejo por lo cual el canal se puede representar en su equivalente banda base como

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\mu}_I(t) + j\boldsymbol{\mu}_Q(t), \quad j \triangleq \sqrt{-1} \quad (2.5)$$

donde $\boldsymbol{\mu}_I$ y $\boldsymbol{\mu}_Q$ son procesos Gaussianos estacionarios de media cero y varianza $\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2/2$.

2.3. Caracterización Estadística del Modelo de Canal de Referencia

2.3.1. Estadísticas de Primer Orden

Con respecto a las estadísticas de primer orden del modelo de canal de referencia entre algunas importantes se encuentran las PDF's de la envolvente y de la fase y los valores promedio como la media, la varianza y la potencia.

Dependiendo de la naturaleza del entorno de propagación, existen diferentes modelos que describen el comportamiento estadístico de la envolvente y de la fase. Entre las PDF's de primer orden de la envolvente que se usan comúnmente se encuentran la Rayleigh, Rician y Nakagami [48]. Por otro lado, la PDF de primer orden de la fase que normalmente se suele considerar es la uniforme.

Es necesario conocer la PDF de la envolvente para entender como varía la amplitud, ya que, dependiendo de la amplitud, va a ser la potencia con la que se recibe la señal transmitida. Debido a las variaciones de amplitud se tienen caídas de potencia en la recepción de la señal y también se requiere conocer a detalle de qué modo son esas caídas de potencia, pues de eso depende que no se interrumpa el enlace entre el transmisor y el receptor. Además, en esquemas de diversidad, se requiere maximizar la relación señal a ruido que no es más que la potencia de la señal entre la potencia del ruido y la potencia de la señal se obtiene a partir de la PDF de la envolvente. También se requiere conocer la PDF de la fase ya que, en algunas ocasiones, demodular la información transmitida requiere información sobre la fase. Como en el denominado detector coherente.

Además es necesario conocer los valores promedio porque, por ejemplo, si se tiene un receptor con una determinada sensibilidad que para operar necesita recibir señales que

tengan una cierta potencia, entonces se vuelve importante saber si la señal recibida se encuentra en promedio por encima de ese valor de potencia. Es por eso que se tienen que conocer los valores promedio como la media, la varianza y la potencia promedio.

Para obtener la envolvente y la fase del modelo de referencia la Ecuación (2.5) se puede reescribir en notación de fasor como

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \zeta(t) \exp \{j\phi(t)\} \quad (2.6)$$

donde $\zeta(t)$ es la envolvente y se define como

$$\begin{aligned} \zeta(t) &\triangleq |\boldsymbol{\mu}(t)| \\ &= \sqrt{\boldsymbol{\mu}_I^2(t) + \boldsymbol{\mu}_Q^2(t)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

y $\phi(t)$ es la fase y se define como

$$\begin{aligned} \phi(t) &\triangleq \arg\{\boldsymbol{\mu}(t)\} \\ &= \arctan \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_Q(t)}{\boldsymbol{\mu}_I(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se sabe de la teoría de la probabilidad con respecto a la Ecuación (2.7) que, como $\boldsymbol{\mu}(t)$ es un proceso Gaussiano complejo de media cero, la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de dos Gaussianas es igual a la distribución Rayleigh con parámetro σ_μ^2 [47, 49].

Uno puede demostrar que independientemente de las estadísticas del AOA ($\boldsymbol{\alpha}_n$), las PDF's de $\zeta(t)$ y $\phi(t)$ del modelo de referencia están dadas respectivamente por [20]

$$p_\zeta(z) = \frac{2z}{\sigma_\mu^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{z^2}{\sigma_\mu^2} \right\}, \quad z \geq 0 \quad (2.9)$$

$$p_\phi(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad \phi \in [-\pi, \pi) \quad (2.10)$$

La Ecuación (2.9), como ya se mencionó anteriormente, puede ser fácilmente indentificada como la PDF Rayleigh, mientras que las estadísticas de primer orden de la expresión en la Ecuación (2.10) son caracterizadas por una PDF uniforme circular [49, 50]. La Figura 2.3 representa la forma típica de la PDF de la envolvente de la forma de onda del modelo de referencia (PDF Rayleigh), mientras que la Figura 2.4 muestra la forma de la PDF de la fase de la forma de onda del modelo de referencia (PDF uniforme).

Los valores promedio de primer orden se obtienen de la siguiente manera. La media de $\boldsymbol{\mu}(t)$ se define como

$$m_\mu(t) \triangleq E\{\boldsymbol{\mu}(t)\} \quad (2.11)$$

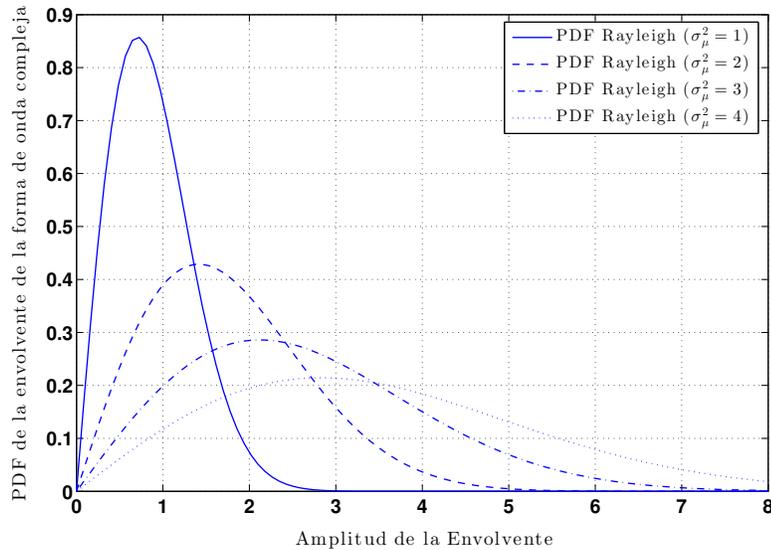


Figura 2.3: PDF de la envolvente de la forma de onda del modelo de referencia con distintos valores de σ_{μ}^2 .

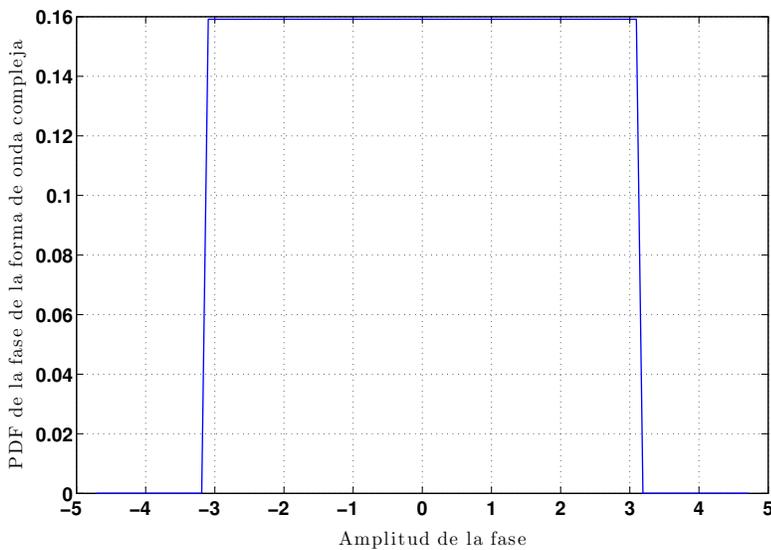


Figura 2.4: PDF de la fase de la forma de onda del modelo de referencia.

Sustituyendo la Ecuación (2.1) en la Ecuación (2.11) y desarrollando tenemos

$$\begin{aligned}
 m_{\mu}(t) &= E \left\{ \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^N E \{ \mathbf{c}_n \} E \{ \exp \{j2\pi \mathbf{f}_n t\} \} E \{ \exp \{j\boldsymbol{\theta}_n\} \}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Utilizando el teorema del valor esperado de una función de una variable aleatoria [51]

$$E\{g(x)\} = \int_{Rx} g(x)f(x)dx \quad (2.13)$$

donde $f(x)$ es la PDF de la variable aleatoria x , tenemos

$$\begin{aligned} E\{\exp\{j\boldsymbol{\theta}_n\}\} &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{j\theta\} \left(\frac{1}{2\pi}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{j\theta\} d\theta \\ &= -\frac{1}{j2\pi} \exp\{j\theta\} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\exp\{-j\pi\} - \exp\{j\pi\}}{2j} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Finalmente llegamos a que

$$m_{\boldsymbol{\mu}}(t) = 0 \quad (2.15)$$

Por otro lado, la varianza se define como

$$\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t) \triangleq E\{|\boldsymbol{\mu}(t) - m_{\boldsymbol{\mu}}(t)|^2\} \quad (2.16)$$

Debido a que $m_{\boldsymbol{\mu}}(t) = 0, \forall t$ tenemos

$$\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t) = E\{|\boldsymbol{\mu}(t)|^2\} = E\{\boldsymbol{\mu}^*(t)\boldsymbol{\mu}(t)\} \quad (2.17)$$

donde $(\cdot)^*$ es el complejo conjugado. Sustituyendo la Ecuación (2.1) en la Ecuación (2.17) y desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n^* \exp\{-j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N \mathbf{c}_m \exp\{j(2\pi \mathbf{f}_m t + \boldsymbol{\theta}_m)\} \right] \right\} \\ &= E \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbf{c}_n^* \mathbf{c}_m \exp\{j2\pi(\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n)t\} \exp\{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E\{\mathbf{c}_n^* \mathbf{c}_m\} E\{\exp\{j2\pi(\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_n)t\}\} E\{\exp\{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si $n = m$

$$E\{\exp\{j(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = E\{1\} = 1 \quad (2.19)$$

entonces, por la Ecuación descrita en (2.2), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t) &= \sum_{n=1}^N E\{|\mathbf{c}_n|^2\} E\{\exp\{j2\pi(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_n)\}\} \\
 &= \sum_{n=1}^N E\{|\mathbf{c}_n|^2\} \\
 &= \frac{\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2}{N} \sum_{n=1}^N (1) = \sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si $n \neq m$

$$E\{\exp\{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = E\{\exp\{j\boldsymbol{\theta}_m\}\} E\{\exp\{-j\boldsymbol{\theta}_n\}\} \tag{2.21}$$

Que como ya se demostró en la Ecuación (2.14), $E\{\exp\{j\boldsymbol{\theta}_m\}\} = 0$, entonces

$$E\{\exp\{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 0 \tag{2.22}$$

De modo que

$$\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t) = 0 \tag{2.23}$$

Por lo tanto, juntando los resultados de las Ecuaciones (2.20) y (2.23), tenemos que

$$\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t) = \sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2, \quad \forall t \tag{2.24}$$

Se puede observar que tanto $m_{\boldsymbol{\mu}}(t)$ como $\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t)$ son cantidades constantes por lo que en lo sucesivo se omitirá la dependencia de t y como $m_{\boldsymbol{\mu}}(t) = 0$, la potencia de $\boldsymbol{\mu}(t)$ es igual a $\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2(t)$ es decir

$$P_{\boldsymbol{\mu}}(t) \triangleq E\{|\boldsymbol{\mu}(t)|^2\} = \sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2. \tag{2.25}$$

2.3.2. Estadísticas de Segundo Orden

Con respecto a las estadísticas de segundo orden del modelo de canal de referencia entre algunas importantes se encuentran las PDF's de la envolvente y la fase y los valores promedio como la función de autocorrelación.

El problema de las estadísticas de segundo orden es que se vuelve muy complicado obtener las PDF's de la envolvente y de la fase. La alternativa a esto es trabajar con los valores promedio de segundo orden, ya que el proceso para obtenerlos es mucho más sencillo. Uno de los valores promedio de segundo orden importantes es la función de autocorrelación.

Debido a que el modelo de referencia definido en la Ecuación (2.5) se asume que es un proceso aleatorio Gaussiano complejo, sus propiedades estadísticas son completamente especificadas por la función de autocorrelación (ACF, por sus siglas en Inglés) [20], porque

los momentos se pueden determinar a partir de dicha función y a su vez si se conocen los momentos se pueden calcular las PDF's de segundo orden de la envolvente y de la fase.

La ACF se define a continuación como

$$r_{\mu\mu}(\tau) \triangleq E\{\mu^*(t)\mu(t+\tau)\} \quad (2.26)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.1) en la Ecuación (2.26) y desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} r_{\mu\mu}(\tau) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n^* \exp \{-j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N \mathbf{c}_m \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_m(t+\tau) + \boldsymbol{\theta}_m)\} \right] \right\} \\ &= E \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbf{c}_n^* \mathbf{c}_m \exp \{j2\pi \mathbf{f}_m \tau\} \exp \{-j2\pi(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m)t\} \exp \{-j(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_m)\} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E \{ \mathbf{c}_n^* \mathbf{c}_m \} E \{ \exp \{j2\pi \mathbf{f}_m \tau\} \} \\ &\quad E \{ \exp \{-j2\pi(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m)t\} \} E \{ \exp \{-j(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_m)\} \} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por lo visto en las Ecuaciones (2.2), (2.19) y (2.22) la expresión anterior se reduce a

$$r_{\mu\mu}(\tau) = \frac{\sigma_{\mu}^2}{N} \sum_{n=1}^N E \{ \exp \{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\} \} \quad (2.28)$$

donde \mathbf{f}_n es igual a la transformación descrita en la Ecuación (2.3) y debido a que los ángulos $\boldsymbol{\alpha}_n$ están igualmente distribuidos entonces

$$E \{ \exp \{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\} \} = E \{ \exp \{j2\pi \mathbf{f}_m \tau\} \}, \quad \forall n, m \quad (2.29)$$

Por tanto

$$r_{\mu\mu}(\tau) = \frac{\sigma_{\mu}^2}{N} E \{ \exp \{j2\pi \mathbf{f} \tau\} \} \sum_{n=1}^N (1) \quad (2.30)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} r_{\mu\mu}(\tau) &= \sigma_{\mu}^2 E \{ \exp \{j2\pi \mathbf{f} \tau\} \} \\ &= \sigma_{\mu}^2 E \{ \exp \{j2\pi f_{\max} \cos(\boldsymbol{\alpha}) \tau\} \} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Aplicando el teorema del valor esperado de una función de una variable aleatoria descrito en la Ecuación (2.13) podemos escribir que [37]

$$r_{\mu\mu}(\tau) = 2\sigma_{\mu}^2 \int_0^{\pi} g_{\boldsymbol{\alpha}}(\alpha) \exp \{j2\pi f_{\max} \cos(\alpha) \tau\} d\alpha \quad (2.32)$$

donde $g_{\boldsymbol{\alpha}} \triangleq [p_{\boldsymbol{\alpha}}(\alpha) + p_{\boldsymbol{\alpha}}(-\alpha)]/2$ es la parte par de la PDF del AOA $p_{\boldsymbol{\alpha}}(\alpha)$ que caracteriza las estadísticas del AOA del canal.

En el caso particular donde el AOA tiene una distribución uniforme (dispersión isotrónica), como la descrita en la Ecuación (2.10), $r_{\mu\mu}(\tau)$ es igual a

$$r_{\mu\mu}(\tau) = \frac{\sigma_{\mu}^2}{\pi} \int_0^{\pi} \exp \{j2\pi f_{\max} \tau \cos(\alpha)\} d\alpha \quad (2.33)$$

Y dado que la función de Bessel de primer tipo y orden cero se define como [52]

$$J_0(x) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp \{jx \cos(z)\} dz \quad (2.34)$$

Entonces tenemos que

$$r_{\mu\mu}(\tau) = \sigma_{\mu}^2 J_0(2\pi f_{\max} \tau) \quad (2.35)$$

La Figura 2.5 muestra la ACF del modelo de referencia cuando el AOA tiene una distribución uniforme.

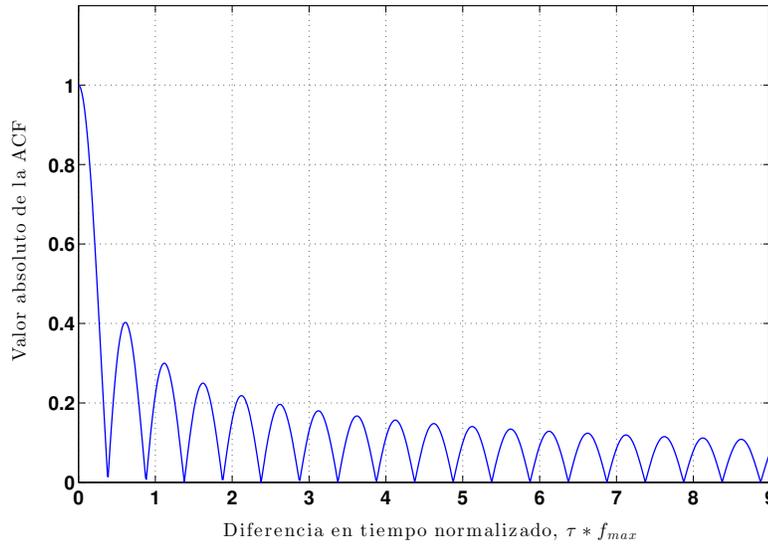


Figura 2.5: ACF del modelo de referencia cuando la PDF del AOA es uniforme.

2.4. Extensión del Modelo para otro tipo de Canales

En general para las comunicaciones inalámbricas, y en particular para las comunicaciones móviles, no existe un único modelo para la distribución estadística de la señal recibida. Como veremos a continuación, el modelo de referencia puede extenderse de forma sencilla a otro tipo de canales importantes. Las distribuciones Rayleigh, Rician o Nakagami son algunos de los modelos ampliamente usados para modelar señales dispersadas que llegan al receptor por múltiples trayectorias [48]. También el modelo de referencia puede

ser extendido a Canales de Banda Ancha. Todos estos canales se pueden representar como transformaciones de un proceso Gaussiano complejo como el que se toma como modelo de canal de referencia en este trabajo de investigación.

Se vuelve necesario poder extender el modelo de referencia a otro tipo de canal porque existen diversos ambientes muy particulares que no se pueden modelar con precisión con un Canal Rayleigh, mientras que otros modelos de canal lo llevan a cabo con mucha más exactitud.

Dependiendo del grado de dispersión que muestre el canal, la señal mostrará diferentes características de desvanecimiento. Por ejemplo, las distribuciones Rayleigh y Nakagami son usadas para modelar dispersiones densas, mientras que la distribución Rician modela desvanecimientos con una LOS fuerte [53], como detallaremos en las siguientes Secciones.

2.4.1. Canal Rician

En entornos cerrados como los que se encuentran en oficinas, fábricas, bodegas, etc., la amplitud del canal suele modelarse como un proceso Rician cuando existe un componente de LOS o con mayor potencia. Un proceso Rician, $\xi(t)$, se modela por una superposición de un proceso aleatorio Gaussiano complejo de media cero $\mu(t)$, que describe la parte difusa del canal (componentes difusos en la señal recibida) debido a la dispersión, y un proceso determinista variante en el tiempo $m(t)$, que describe la influencia del componente directo (en LOS), como sigue

$$\mu_\rho(t) = \mu(t) + m(t) \quad (2.36)$$

donde $\mu(t) = \mu_1(t) + j\mu_2(t)$, $j \triangleq \sqrt{-1}$ con componentes reales $\mu_i(t)$, $i = 1, 2$, y varianza $\text{Var}\{\mu(t)\} = \text{Var}\{\mu_i(t)\} = \sigma_\mu^2$, mientras que $m(t)$ es igual a

$$m(t) = m_1(t) + jm_2(t) = \rho \exp \{j(2\pi f_\rho t + \theta_\rho)\} \quad (2.37)$$

amplitud, frecuencia Doppler y fase del componente directo son denotados por ρ , f_ρ y θ_ρ respectivamente.

La envolvente se obtiene como sigue

$$\xi(t) = |\mu_\rho(t)| \quad (2.38)$$

Procediendo como en [20,54], uno puede mostrar que independiente de las propiedades de correlación del canal la PDF de primer orden del proceso Rician está dada como

$$p_\xi(z) = \frac{2z}{\sigma_\mu^2} \exp \left\{ -\frac{z^2 + \rho^2}{\sigma_\mu^2} \right\} I_0 \left(\frac{z\rho}{\sigma_\mu^2} \right), \quad z \geq 0 \quad (2.39)$$

donde $I_0(\cdot)$ es la función de Bessel modificada de primer tipo y orden cero, ρ es la amplitud del componente directo de la señal y σ_μ^2 es la varianza del componente difuso. Si $\rho = 0$, es fácil ver que la PDF Rician se reduce a la PDF Rayleigh descrita en la Ecuación (2.9).

La Figura 2.6 ilustra la PDF Rician con distintos valores de ρ y σ_μ^2 . Se puede observar que efectivamente cuando el valor de $\rho = 0$ y el de $\sigma_\mu^2 = 1$, la PDF Rician se transforma a una PDF Rayleigh.

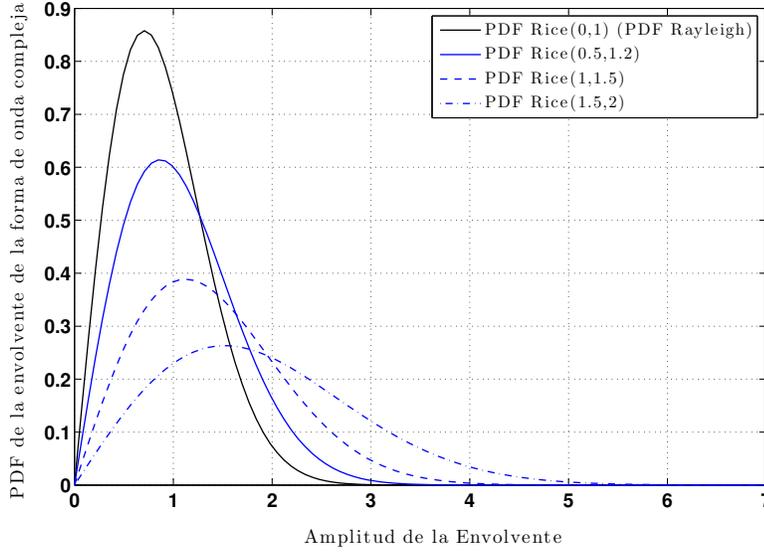


Figura 2.6: PDF Rician con diferentes valores de media (ρ) y varianza (σ_μ^2).

2.4.2. Canal Nakagami

En el caso de edificios muy cerca uno de otro el canal se puede modelar mejor con un proceso Nakagami porque modela de mejor forma dispersiones muy densas, es decir, desvanecimientos más severos. Un proceso Nakagami es una generalización del proceso Rician considerando ρ grados de libertad [55].

El proceso Nakagami $\eta(t)$ se obtiene de

$$\eta(t) = |\mu(t)| \quad (2.40)$$

donde $\mu(t) = \mu_1(t) + j\mu_2(t)$, $j \triangleq \sqrt{-1}$; $\mu_1(t)$ es el componente en fase y $\mu_2(t)$ es el componente en cuadratura y son iguales a [55, 56]

$$\mu_1(t) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^{\rho} G_i \sqrt{\sum_{i=1}^{\rho} G_i^2} \right) \quad (2.41)$$

$$\mu_2(t) = \text{sign} \left(\sum_{i=\rho+1}^{2\rho} G_i \sqrt{\sum_{i=\rho+1}^{2\rho} G_i^2} \right) \quad (2.42)$$

donde $\text{sign}(\cdot)$ es la función signum definida como

$$\text{sign} \triangleq \frac{z}{|z|} \quad (2.43)$$

y G_i , ($i = 1, \dots, 2\rho$), es un proceso Gaussiano independiente e idénticamente distribuido de media cero y varianza σ_μ^2 . Así mismo, $\boldsymbol{\mu}(t)$ se puede escribir en notación de fasor como

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) \exp \{j\boldsymbol{\phi}(t)\} \quad (2.44)$$

donde $\boldsymbol{\eta}(t)$ es la envolvente y $\boldsymbol{\phi}(t)$ la fase.

La envolvente $\boldsymbol{\eta}(t)$ tiene una PDF Nakagami, también llamada distribución m [57], la cual se muestra en la siguiente ecuación

$$p_\boldsymbol{\eta}(z) = \frac{2}{\Gamma(\rho)} \left(\frac{\rho}{\sigma_\mu^2} \right)^\rho z^{2\rho-1} \exp \left\{ -\frac{z^2 \rho}{\sigma_\mu^2} \right\}, \quad z \geq 0, \rho \geq \frac{1}{2} \quad (2.45)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma estandar que se define como

$$\Gamma(n) \triangleq \int_0^\infty \exp \{-x\} x^{n-1} dx \quad (2.46)$$

σ_μ^2 es la potencia de desvanecimiento promedio (varianza del componente difuso) y se define como

$$\sigma_\mu^2 \triangleq E\{z^2\} \quad (2.47)$$

y ρ es el parámetro de desvanecimiento Nakagami el cual determina que tan severo es el desvanecimiento y se define como

$$\rho \triangleq \frac{E\{z^2\}^2}{\text{Var}\{z^2\}} = \frac{\sigma_\mu^4}{E\{(z^2 - \sigma_\mu^2)^2\}} \quad (2.48)$$

Cuando $\rho \rightarrow \infty$, el canal Nakagami converge a un canal estático y cuando $\rho = \frac{1}{2}$, el canal Nakagami converge a una distribución Gaussiana unilateral. En el caso donde el parámetro $\rho = 1$, la distribución Nakagami se reduce a una distribución Rayleigh [47, 49] como la descrita en la Ecuación (2.9). Esto básicamente significa que si $\rho < 1$, el desvanecimiento Nakagami es más severo que un desvanecimiento Rayleigh, y para valores de $\rho > 1$ las circunstancias del desvanecimiento son menos severas y la distribución Nakagami se aproxima mucho a la distribución Rician.

La Figura 2.7 ilustra la PDF Nakagami con distintos valores de ρ y σ_μ^2 . Se puede observar que efectivamente cuando el valor de $\rho = 1$ y el de $\sigma_\mu^2 = 1$, la PDF Nakagami se transforma a una PDF Rayleigh como la del modelo de referencia.

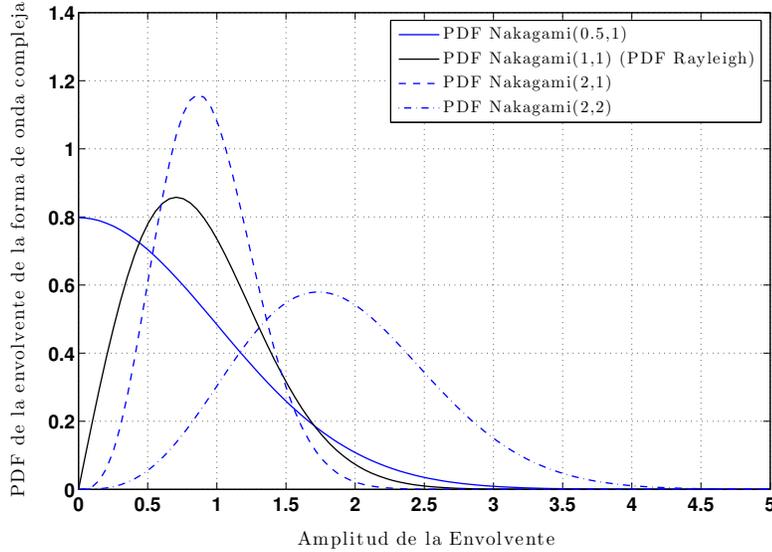


Figura 2.7: PDF Nakagami con diferentes valores de media (ρ) y varianza (σ_μ^2).

2.4.3. Canales de Banda Ancha

El diseño de modelos de simulación para banda ancha es un tema de investigación importante. Estos modelos de simulación son importantes para el análisis de sistemas que requieren una mayor cantidad de ancho de banda para operar, como los basados en espectro extendido [58] y tecnologías de banda ultra ancha [59].

El modelo clásico aplicado a canales de banda ancha se basa en el modelo de líneas de retardo por pulsos (TDLM, por sus siglas en Inglés) para caracterizar las ganancias que se forman por diferentes retardos el cual fue propuesto por primera vez en [60] asumiendo un entorno estacionario. El modelo TDLM se presenta a continuación

$$h(\tau; t) = \sum_{n=1}^{N(t)} a_n(t) \exp \{-j2\pi f_c \tau_n(t)\} \delta(\tau - \tau_n(t)) \quad (2.49)$$

donde $N(t)$ es el número de retardos (trayectorias), $a_n(t)$ es el factor de atenuación para la señal recibida de la n -ésima trayectoria, $\tau_n(t)$ es el retardo de propagación de la n -ésima trayectoria y f_c la frecuencia portadora. Los retardos se consideran no correlacionados entre sí teniendo en cuenta que cada uno proviene de obstáculos independientes. El diagrama a bloques del modelo TDLM se muestra en la Figura 2.8.

El modelo TDLM es simple pero es un modelo muy práctico. Se basa en la comprensión física de la señal recibida, la cual es una suma de múltiples réplicas de la señal transmitida debido a la reflexión, refracción y dispersión. Este modelo ha sido usado en aplicaciones de radio móvil con gran éxito [61, 62].

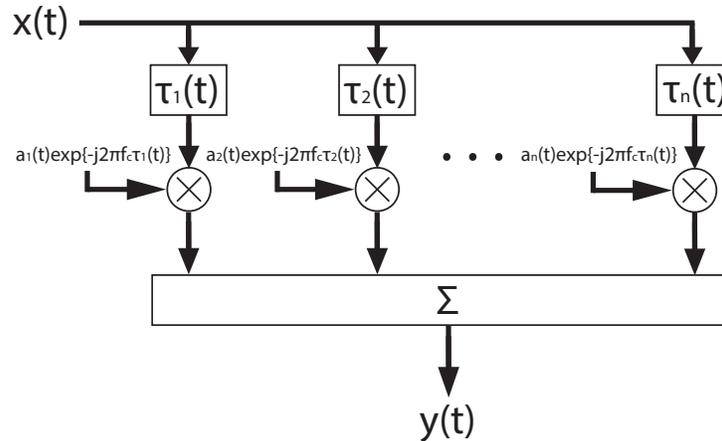


Figura 2.8: Diagrama a bloques de un modelo multitrayectoria (modelo TDLM) para canales de banda ancha.

2.5. Conclusiones

En este Capítulo vimos que la propagación por múltiples trayectos o propagación multitrayecto se debe a que las ondas electromagnéticas emitidas por el transmisor no llegan a la antena receptora de forma directa debido a los obstáculos como edificios y árboles que causan fenómenos como la reflexión, la difracción, el sombreado y la dispersión. Además, vimos que el efecto Doppler tiene una influencia negativa en las características de transmisión del radio canal móvil.

Presentamos también el modelo de propagación que tomamos como referencia el cual fue propuesto por Clarke. En este modelo la envolvente compleja del canal se representa como la superposición de una serie de ondas planas viajando horizontalmente. En el caso particular en el que el número de ondas es suficientemente grande, podemos decir que la envolvente compleja del canal tiende a un proceso Gaussiano bidimensional (definido en el plano de los números complejos). El modelo de Clarke es importante ya que es ampliamente utilizado y se puede tomar como base para modelar otro tipo de canales importantes como el Rician, Nakagami y los de Banda Ancha. Este último aspecto es importante, ya que si se tiene la capacidad de diseñar un simulador adecuado para el modelo de Clarke, este simulador se puede adecuar de manera sencilla para simular otro tipo de canales.

Por otro lado, se analizaron algunas de las estadísticas importantes de primer y segundo orden del modelo de Clarke. En particular, las PDF's de primer orden de la envolvente y de la fase así como los valores promedio relevantes como la media, la varianza y la potencia. Dependiendo del entorno de propagación, existen diferentes modelos que describen el comportamiento estadístico de la envolvente y de la fase. Entre las PDF's de primer orden de la envolvente que se usan comúnmente se encuentran la Rayleigh, Rician y Nakagami. Por otro lado, la PDF de primer orden de la fase que normalmente se suele considerar es

la uniforme. Con respecto a las estadísticas de segundo orden del modelo de referencia, se analizó la ACF del canal.

Los valores promedio de primer y segundo orden que se analizaron en este Capítulo son importantes, ya que nos sirven para obtener información importante sobre la estacionariedad y la ergodicidad del canal, en particular, la estacionariedad en el sentido amplio, la ergodicidad en media y la ergodicidad en la función de autocorrelación como se verá en el siguiente Capítulo.

Capítulo 3

Clases de Modelos de Simulación de Canal de SOC

En este Capítulo se analizan las diferentes clases de modelos de simulación de SOC, así como los criterios que se toman en cuenta para la realización de la clasificación. Además se abordan las propiedades estadísticas que tienen estas clases como la ergodicidad en la media, la ergodicidad en la función de autocorrelación y la estacionariedad en el sentido amplio. También se analizan algunos métodos de parametrización importantes para los modelos de simulación de canal de SOC.

3.1. Introducción

Los simuladores computacionales se han convertido en herramientas fundamentales para el diseño, prueba y optimización de sistemas de comunicaciones móviles modernos [63], ya que proporcionan un medio accesible, potente y reproducible para evaluar el rendimiento de sistemas de comunicaciones móviles. La proliferación de dispositivos electrónicos de bajo costo con altas capacidades de cálculo y la necesidad que existe entre los ingenieros en telecomunicaciones por herramientas prácticas y potentes para la evaluación del rendimiento de sistemas de comunicaciones móviles han convertido el diseño de simuladores computacionales en un tema de investigación importante.

Cuando se diseña un simulador para evaluar el rendimiento de sistemas de comunicaciones inalámbricos, es fundamental elegir un modelo apropiado para simular el canal. Pues este es, de hecho, un componente de suma importancia, ya que la mayoría de los problemas que afectan el rendimiento de los sistemas de comunicaciones inalámbricos son causados por el canal [2].

Muchos modelos de simulación de radio canal multirrayecto han sido propuestos en la literatura [4–8], sin embargo los modelos de simulación basados en una sumatoria finita de cisoides han mostrado ser una excelente base para el diseño de simuladores de canal SISO [45, 64] y MIMO [30, 65, 66]. Los modelos de SOC son adecuados para la simulación de canales con desvanecimientos tanto en condiciones de dispersión isotrópica y no isotrópica [37]. Los modelos de SOC han encontrado aplicaciones, por ejemplo, en el análisis

asistido por computadora de sistemas celulares, redes inalámbricas de área local y sistemas de comunicación de móvil a móvil, además en el análisis de laboratorio de esquemas de codificación espacio-tiempo [67].

La ergodicidad y la estacionariedad son propiedades deseables de cualquier modelo de simulación de radio canales multitrayecto. Ya que, si el modelo de simulación de canal es no ergódico con respecto a la autocorrelación, la función de autocorrelación temporal (TACF, por sus siglas en Inglés) no encajará bien con la ACF de ensamble del modelo de referencia. En este caso, se vuelve necesario promediar varias realizaciones del proceso estocástico para incrementar el desempeño del simulador, lo cual aumenta drásticamente la complejidad del simulador. Debido a esto, en la práctica, no sólo es importante determinar qué tan exacto es el simulador para emular las propiedades estadísticas del modelo de referencia, sino también minimizar el tiempo de ejecución requerido por el simulador para producir resultados estadísticamente precisos. En este último aspecto, por ejemplo, la información que proporciona la propiedad de ergodicidad en la autocorrelación es de suma importancia. Si el modelo es un proceso ergódico con respeto a la autocorrelación, entonces es posible determinar la función de autocorrelación del canal en una sola realización. Esto nos da una alternativa eficiente para aproximar una ACF de un canal específico sin recurrir al consumo de tiempo del cálculo de los promedios temporales.

3.2. Clasificación de los Modelos de Simulación de Canal de SOC

Se ha demostrado en numerosos artículos [45, 64, 68] que la mayoría de las propiedades estadísticas, relevantes para el análisis del rendimiento de sistemas de comunicaciones inalámbricos, del modelo de canal caracterizado por $\mu(t)$, tales como sus propiedades de correlación y las distribuciones de primer orden de la envolvente y de la fase, pueden ser simuladas eficientemente por medio de un modelo de SOC que comprende un número finito de cisoides.

Los modelos de SOC dependen de tres tipos de parámetros los cuales son llamados ganancias, frecuencias y fases. En principio, cada tipo de estos parámetros puede ser introducido como una variable aleatoria o como una cantidad constante. Si todos los parámetros son constantes, obtenemos un proceso completamente determinista. Por otro lado, si al menos uno de los parámetros es una variable aleatoria, obtenemos un proceso estocástico.

Basándose en el carácter aleatorio o determinista de estos parámetros, se pueden identificar $2^3 = 8$ clases de modelos de canal de SOC en total: Siete clases de modelos de SOC estocásticos y una clase de modelo de SOC determinista. La clasificación de los simuladores de canal de SOC basada en el tipo de parámetros de los cisoides se presentó en [69]. Las ocho clases están listadas en la Tabla 3.1.

La estructura general de un simulador de canal de SOC con N cisoides, caracterizados

Tabla 3.1: Clasificación de los modelos de simulación de SOC con respecto al tipo de parámetros de los cisoides.

Parámetros	Ganancias	Frecuencias	Fases
Clase I	Determinista	Determinista	Determinista
Clase II	Determinista	Determinista	Aleatorio
Clase III	Determinista	Aleatorio	Determinista
Clase IV	Determinista	Aleatorio	Aleatorio
Clase V	Aleatorio	Determinista	Determinista
Clase VI	Aleatorio	Determinista	Aleatorio
Clase VII	Aleatorio	Aleatorio	Determinista
Clase VIII	Aleatorio	Aleatorio	Aleatorio

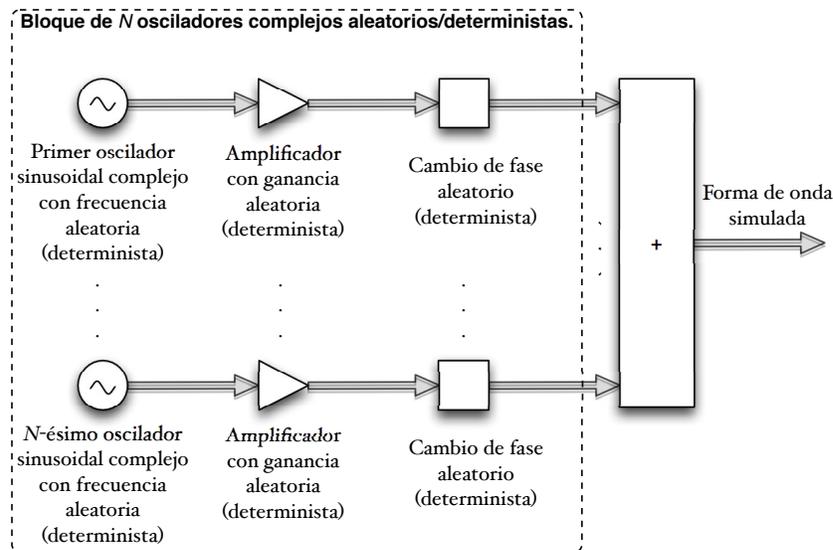


Figura 3.1: Diagrama a bloques de un modelo de simulación de SOC.

por los mismos tipos de parámetros, es descrito por la Figura 3.1, donde $0 < N < \infty$.

3.3. Análisis de las Propiedades Estadísticas de los Modelos de Simulación de Canal de SOC

En esta Sección, se muestra un análisis sistemático de las propiedades de AE, ME y WSS de las ocho clases de modelos de simulación de SOC que, como ya se mencionó anteriormente, son propiedades deseables en cualquier modelo de simulación estocástico. El análisis de las propiedades estadísticas de los modelos de simulación de SOC se presentó originalmente en [43, 70, 71]. En estos artículos el estudio se realizó bajo condiciones ideales:

Suponiendo que la longitud de las formas de onda generadas por el simulador es infinita.

Es entonces que, motivados por el surgimiento de estos artículos y por resultados que ahí se presentan, nos dimos a la tarea de entender lo que se ha hecho en la literatura y replicar los resultados para llevar a cabo el mismo análisis pero tomando en cuenta las limitaciones prácticas con el propósito de hacer una comparativa que nos dé información sobre qué tanto afectan estas restricciones en la eficiencia del simulador para emular con precisión las estadísticas del modelo de canal de referencia. Cabe destacar que, en el trayecto de entender y replicar los resultados, se detectaron algunos errores en las expresiones que se presentaron en [70], dichas expresiones se corrigen y se muestran de manera correcta en los resultados que se presentan en este Capítulo. Antes de definir matemáticamente las propiedades de AE, ME y WSS hablaremos de algunas restricciones que son impuestas a los tres tipos de parámetros de los modelos de simulación de SOC.

3.3.1. Consideraciones para las Fases, Frecuencias y Ganancias de los Modelos de SOC

El análisis de las propiedades estadísticas de los modelos de simulación de SOC se realizó bajo las siguientes consideraciones:

- Si las fases de los cisoides son variables aleatorias, entonces están uniformemente distribuidas sobre $[-\pi, \pi)$.
- Si las frecuencias Doppler son variables aleatorias, entonces se obtienen de la transformación

$$\mathbf{f}_n \triangleq f_{\max} \cos(\boldsymbol{\alpha}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

donde los AOA's $\boldsymbol{\alpha}_n$ son variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas sobre $[-\pi, \pi)$, teniendo, cada una, una PDF $p_{\boldsymbol{\alpha}}(\alpha)$ idéntica a la que caracteriza las estadísticas del AOA del modelo de referencia.

- Si las ganancias de los cisoides son variables aleatorias, entonces están idénticamente distribuidas con un valor medio m_c y una varianza σ_c^2 . Se asume que se cumple la igualdad $\sigma_c^2 = \sigma_{\mu}^2/N$.
- Todas las variables aleatorias son estadísticamente independientes.

3.3.2. Definición de un Proceso WSS, ME y AE

Para mayor claridad y antes de proceder a analizar las propiedades WSS, ME y AE de los modelos de simulación de SOC, es conveniente definir formalmente estos conceptos [47].

Definición 1 (Proceso AE): Sea $\hat{\mu}(t)$ un proceso aleatorio cuya ACF se define como

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t_1)\hat{\mu}(t_2)\} \quad (3.2)$$

la cual depende sólo de la diferencia de tiempo $\tau = t_2 - t_1$, de modo que $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$, donde $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t + \tau)\}$, entonces $\hat{\mu}(t)$ es llamado un proceso AE si:

- La TACF $r_{\hat{\mu}^{(k)}\hat{\mu}^{(k)}}(\tau) \triangleq \langle (\hat{\mu}^{(k)}(t))^* \hat{\mu}^{(k)}(t + \tau) \rangle$ de cada función muestral $\hat{\mu}^{(k)}(t)$ de $\hat{\mu}(t)$ es igual a $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$, es decir, $r_{\hat{\mu}^{(k)}\hat{\mu}^{(k)}}(\tau) = r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau), \forall k$.

La notación $\langle x(t) \rangle$ representa el promedio temporal de una función arbitraria $x(t)$ que depende del tiempo.

Definición 2 (Proceso WSS): Sea $\hat{\mu}(t)$ un proceso aleatorio. Entonces, $\hat{\mu}(t)$ es llamado WSS si:

- El valor medio $m_{\hat{\mu}}(t) \triangleq E\{\hat{\mu}(t)\}$ de $\hat{\mu}(t)$ es independiente del tiempo, es decir, $m_{\hat{\mu}}(t) = m_{\hat{\mu}}$, donde $m_{\hat{\mu}}$ es una constante positiva.
- La ACF $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t_1)\hat{\mu}(t_2)\}$ de $\hat{\mu}$ depende sólo de la diferencia de tiempo $\tau = t_2 - t_1$, de modo que $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$, lo que significa que $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2)$ es insensible a la variación de tiempo (TSI, por sus siglas en Inglés).

Definición 3 (Proceso ME): Sea $\hat{\mu}(t)$ un proceso aleatorio cuyo valor medio $m_{\hat{\mu}}(t) \triangleq E\{\hat{\mu}(t)\}$ es constante en el tiempo, de modo que $m_{\hat{\mu}}(t) = m_{\hat{\mu}}$. Entonces, $\hat{\mu}(t)$ es llamado ME si:

- El valor medio temporal (TMV, por sus siglas en Inglés) $m_{\hat{\mu}}^{(k)} \triangleq \langle \hat{\mu}^{(k)}(t) \rangle$ de cualquier función muestral $\hat{\mu}^{(k)}(t)$ de $\hat{\mu}(t)$ es igual a $m_{\hat{\mu}}$, es decir, $m_{\hat{\mu}}^{(k)} = m_{\hat{\mu}}, \forall k$.

3.3.3. Análisis de las Propiedades de AE, ME y WSS de los Modelos de Simulación de Canal de SOC

Clase I de Simuladores de Canal: Con referencia a la Tabla 3.1, los modelos de simulación de la Clase I son caracterizados por un modelo de SOC determinista como sigue

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \quad (3.3)$$

donde las ganancias de los cisoides c_n , las frecuencias Doppler f_n y las fases θ_n son constantes. La TACF $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \triangleq \langle (\hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t + \tau)) \rangle$ de esta clase de modelos de SOC determinista está dada como

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t + \tau) dt \quad (3.4)$$

Sustituyendo la Ecuación (3.3) en la Ecuación (3.4) y desarrollando tenemos que

$$\begin{aligned}
 r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{n=1}^N c_n^* \exp \{-j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N c_m \exp \{j(2\pi f_m(t + \tau) + \theta_m)\} \right] dt \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n^* c_m \exp \{j2\pi f_m \tau\} \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \\
 &\quad \times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp \{j2\pi(f_m - f_n)t\} dt \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Realizando la integral de la expresión anterior tenemos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp \{j2\pi(f_m - f_n)t\} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}(\pi(f_m - f_n)T) \tag{3.6}$$

Si $n = m$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}(\pi(f_n - f_n)T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}(0) = 1 \tag{3.7}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{n=1}^N c_n^* c_n \exp \{j2\pi f_n \tau\} \exp \{j(\theta_n - \theta_n)\} \\
 &= \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp \{j2\pi f_n \tau\} \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Si $n \neq m$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}(\pi(f_m - f_n)T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}(\infty) = 0 \tag{3.9}$$

entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) = 0 \tag{3.10}$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.8) y (3.10), podemos escribir $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ como [72]

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) = \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp \{j2\pi f_n \tau\} \tag{3.11}$$

El concepto de ergodicidad en la función de autocorrelación no aplica en los simuladores Clase I, ya que esta clase de modelos es completamente determinista.

El TMV de esta clase de modelos de SOC determinista se define como $m_{\hat{\mu}} \triangleq \langle \hat{\mu}(t) \rangle$ y esta dado como

$$m_{\hat{\mu}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{\mu}(t) dt \quad (3.12)$$

Sustituyendo la Ecuacion (3.3) en la Ecuación (3.12) y desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\mu}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} dt \\ &= \sum_{n=1}^N \exp \{j\theta_n\} \times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp \{j2\pi f_n t\} dt \end{aligned} \quad (3.13)$$

Resolviendo la integral tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp \{j2\pi f_n t\} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\pi f_n} \sin(\pi f_n T) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}(\pi f_n T) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por tanto

$$m_{\hat{\mu}} = 0 \quad (3.15)$$

Los conceptos de estacionariedad y ergodicidad en la media no aplican en los simuladores Clase I, ya que esta clase de modelos es completamente determinista, Sin embargo, la información sobre el TMV de los simuladores Clase I es fundamental para saber si una clase de los modelos de SOC estocásticos está definida por un conjunto de procesos ME.

Clase II de Simuladores de Canal: Los modelos de simulación de esta clase están caracterizados por un modelo de SOC estocástico de la forma

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \quad (3.16)$$

Por lo que su ACF se define como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t_1)\hat{\mu}(t_2)\}$. Sutituyendo la Ecuación (3.16) en la definición y desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N c_n^* \exp \{-j(2\pi f_n t_1 + \theta_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N c_m \exp \{j(2\pi f_m t_2 + \theta_m)\} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n^* c_m \exp \{j2\pi(f_m t_2 - f_n t_1)\} E\{\exp \{j(\theta_m - \theta_n)\}\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si $n = m$

$$E\{\exp\{j(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 1 \quad (3.18)$$

entonces

$$\begin{aligned} r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) &= \sum_{n=1}^N \sum_{n=1}^N c_n^* c_n \exp\{j2\pi f_n(t_2 - t_1)\} \\ &= \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp\{j2\pi f_n \tau\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si $n \neq m$

$$E\{\exp\{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 0 \quad (3.20)$$

entonces

$$r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) = 0 \quad (3.21)$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.19) y (3.21), tenemos que

$$r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp\{j2\pi f_n \tau\} \quad (3.22)$$

Este resultado muestra que $r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2)$ es TSI, lo que significa que $r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2)$ depende sólo de la diferencia de tiempo $\tau = t_2 - t_1$, es decir, $r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) = r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\tau)$. Entonces se puede decir que los modelos de simulación Clase II son procesos AE.

La media para esta clase se define como $m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t) \triangleq E\{\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.16) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t) &= E\left\{\sum_{n=1}^N c_n \exp\{j(2\pi f_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\}\right\} \\ &= \sum_{n=1}^N c_n \exp\{j2\pi f_n t\} E\{\exp\{j\boldsymbol{\theta}_n\}\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como ya vimos en el Capítulo anterior en la Ecuación (2.14), $E\{\exp\{j\boldsymbol{\theta}_n\}\} = 0$, entonces tenemos que

$$m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t) = 0 \quad (3.24)$$

Como $m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}^{(k)} = m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = 0, \forall k$ y además, como se vió en la Ecuación (3.22), la ACF de esta clase de modelos de simulación de SOC es TSI, podemos concluir que los simuladores de

SOC Clase II son procesos WSS y ME.

Clase III de Simuladores de Canal: Esta clase de simuladores está definida por un conjunto de procesos estocásticos de la forma

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \theta_n)\} \quad (3.25)$$

Su ACF se define como $r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\boldsymbol{\mu}}^*(t_1)\hat{\boldsymbol{\mu}}(t_2)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.25) en la definición y desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N c_n^* \exp \{-j(2\pi \mathbf{f}_n t_1 + \theta_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N c_m \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_m t_2 + \theta_m)\} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n^* c_m \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} E\{\exp \{j2\pi(\mathbf{f}_m t_2 - \mathbf{f}_n t_1)\}\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si $n = m$

$$E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n(t_2 - t_1)\}\} = E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\}\} \quad (3.27)$$

entonces

$$r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N c_n^2 E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\}\} \quad (3.28)$$

Como se cumple lo descrito en la Ecuación (2.29) y además $r_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}}(\tau) = \sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2 E\{\exp \{j2\pi f \tau\}\}$ por lo visto en el Capítulo anterior tenemos que

$$E\{\exp \{j2\pi f \tau\}\} = \frac{r_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}}(\tau)}{\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2} \quad (3.29)$$

entonces

$$r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n^2}{\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2} r_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}}(\tau) \quad (3.30)$$

Asumiendo que $c_n = \sigma_{\boldsymbol{\mu}} \sqrt{1/N}$, $\forall n$, podemos reescribir la Ecuación anterior como

$$r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) = r_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}}(\tau) \quad (3.31)$$

Si $n \neq m$

$$r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n^* c_m \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} E\{\exp \{j2\pi(\mathbf{f}_m t_2 - \mathbf{f}_n t_1)\}\} \quad (3.32)$$

Desarrollando tenemos que

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \left[\sum_{n=1}^N c_n E\{\exp\{j2\pi \mathbf{f}_n t_1\}\} \exp\{j\theta_n\} \right]^* \times \left[\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_m E\{\exp\{j2\pi \mathbf{f}_m t_2\}\} \exp\{j\theta_m\} \right] \quad (3.33)$$

Por la Ecuación (3.29) tenemos que

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= \left[\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(t_1) \exp\{j\theta_n\} \right]^* \left[\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{c_m}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(t_2) \exp\{j\theta_m\} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_\mu^4} r_{\mu\mu}^*(t_1) r_{\mu\mu}(t_2) \times \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n^* c_m \exp\{j(\theta_m - \theta_n)\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Asumiendo que $c_n = \sigma_\mu \sqrt{1/N}$, $\forall n$, podemos reescribir la Ecuación como

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \frac{1}{N\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}^*(t_1) r_{\mu\mu}(t_2) \times \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp\{j(\theta_m - \theta_n)\} \quad (3.35)$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.31) y (3.35), tenemos que

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = r_{\mu\mu}(\tau) + \frac{1}{N\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}^*(t_1) r_{\mu\mu}(t_2) \times \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp\{j(\theta_m - \theta_n)\} \quad (3.36)$$

Es evidente, de la Ecuación (3.36), que la ACF de los simuladores Clase III es sensible a la variación de tiempo. Así, como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \neq r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$, podemos concluir que los modelos de simulación de SOC de la Clase III no son procesos AE.

La media para esta clase se define como $m_{\hat{\mu}}(t) \triangleq E\{\hat{\mu}(t)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.25) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\mu}}(t) &= E \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \exp\{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \theta_n)\} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N c_n \exp\{j\theta_n\} E\{\exp\{j2\pi \mathbf{f}_n t\}\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por el resultado en la Ecuación (3.29) tenemos que

$$m_{\hat{\mu}}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp\{j\theta_n\} \frac{r_{\mu\mu}(t)}{\sigma_\mu^2} \quad (3.38)$$

donde $r_{\mu\mu}(t)$ es la ACF del modelo de canal de referencia y es TSI. Pero como $m_{\hat{\mu}}(t)$ depende del tiempo, entonces los simuladores de SOC Clase III no son procesos WSS ni ME.

Clase IV de Simuladores de Canal: Los simuladores Clase IV están caracterizados por un proceso estocástico de la forma

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \quad (3.39)$$

Y su ACF se define como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t_1)\hat{\mu}(t_2)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.39) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N c_n^* \exp \{-j(2\pi \mathbf{f}_n t_1 + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N c_m \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_m t_2 + \boldsymbol{\theta}_m)\} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n^* c_m E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} E\{\exp \{j2\pi(\mathbf{f}_m t_2 - \mathbf{f}_n t_1)\}\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si $n = m$

$$E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 1 \quad (3.41)$$

$$E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n(t_2 - t_1)\}\} = E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\}\} \quad (3.42)$$

Por el resultado de la Ecuación (3.29) tenemos que

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= \sum_{n=1}^N \frac{c_n^2}{\sigma_{\mu}^2} r_{\mu\mu}(\tau) \\ &= r_{\mu\mu}(\tau) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Si $n \neq m$

$$E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 0 \quad (3.44)$$

Por lo que

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = 0 \quad (3.45)$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.43) y (3.45), tenemos que

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = r_{\mu\mu}(\tau) \quad (3.46)$$

Es fácil observar que la ACF de los simuladores Clase IV es TSI e igual a la ACF del modelo de referencia. Nuevamente, $\mu(t)$ no es un proceso AE ya que la ACF del modelo de referencia es diferente de $r_{\hat{\mu}^{(k)}\hat{\mu}^{(k)}}(\tau)$.

La media para esta clase se define como $m_{\hat{\mu}}(t) \triangleq E\{\hat{\mu}(t)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.39) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\mu}}(t) &= E \left\{ \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N c_n E\{\exp \{j\theta_n\}\} E\{\exp \{j2\pi f_n t\}\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Como ya vimos en el Capítulo anterior en la Ecuación (2.14), $E\{\exp \{j\theta_n\}\} = 0$, entonces tenemos que

$$m_{\hat{\mu}}(t) = 0 \quad (3.48)$$

Como $m_{\hat{\mu}}^{(k)} = m_{\hat{\mu}} = 0, \forall k$, podemos concluir que los simuladores de SOC de la Clase IV están definidos por un conjunto de procesos aleatorios ME. Por otra parte, como se observa en la Ecuación (3.46), la ACF de esta clase de modelos de simulación de SOC es TSI, por lo que resulta que los modelos de SOC de esta clase también son procesos aleatorios WSS.

Clase V de Simuladores de Canal: Esta clase de simuladores es definida por un conjunto de modelos de SOC estocásticos de la forma

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \quad (3.49)$$

Su ACF se define como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t_1)\hat{\mu}(t_2)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.49) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N c_n^* \exp \{-j(2\pi f_n t_1 + \theta_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N c_m \exp \{j(2\pi f_m t_2 + \theta_m)\} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \{j2\pi(f_m t_2 - f_n t_1)\} E\{c_n^*\} E\{c_m\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Si $n = m$

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \exp \{j2\pi f_n(t_2 - t_1)\} E\{c_n^2\} \quad (3.51)$$

como

$$E\{c_n^2\} = \text{Var}\{c_n\} + E^2\{c_n\} \quad (3.52)$$

Y como ya habíamos dicho en la Sección 3.3.1 c_n tiene una media m_c y una varianza σ_c^2 , entonces tenemos

$$E\{c_n^2\} = \sigma_c^2 + m_c^2 \quad (3.53)$$

entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \exp \{j2\pi f_n \tau\} (\sigma_c^2 + m_c^2) \quad (3.54)$$

Si $n \neq m$

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \{j2\pi(f_m t_2 - f_n t_1)\} E\{\mathbf{c}_n^*\} E\{\mathbf{c}_m\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \{j2\pi(f_m t_2 - f_n t_1)\} m_c^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.54) y (3.55), tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= \sum_{n=1}^N \left[\exp \{j2\pi f_n \tau\} (\sigma_c^2 + m_c^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \{j2\pi(f_m t_2 - f_n t_1)\} m_c^2 \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Es claro ver de la Ecuación anterior que si $m_c \neq 0$, entonces la ACF de los simuladores Clase V es sensible a la variación de tiempo, lo que implica que $\hat{\mu}(t)$ no es un proceso AE. Por otro lado si $m_c = 0$ entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sigma_c^2 \sum_{n=1}^N \exp \{j2\pi f_n \tau\} \quad (3.57)$$

A pesar de que la ACF de $\hat{\mu}(t)$ depende sólo de la diferencia de tiempo $\tau = t_2 - t_1$, este proceso aleatorio no es un proceso AE ya que la condición $r_{\hat{\mu}^{(k)}\hat{\mu}^{(k)}}(\tau) = r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ no se satisface.

La media para esta clase se define como $m_{\hat{\mu}}(t) \triangleq E\{\hat{\mu}(t)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.49) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\mu}}(t) &= E \left\{ \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} E\{\mathbf{c}_n\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Como ya sabemos la media de $c_n = m_c$ por lo que tenemos que

$$m_{\hat{\mu}}(t) = \sum_{n=1}^N \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} m_c \quad (3.59)$$

Si $m_c \neq 0$, entonces el valor medio de los simuladores Clase V depende del tiempo, por lo que podemos concluir que $m_{\hat{\mu}}(t)$ no es un proceso WSS ni ME. Sin embargo, si $m_c = 0$, entonces $m_{\hat{\mu}}(t)$ demuestra ser un proceso aleatorio WSS y ME.

Clase VI de Simuladores de Canal: Los simuladores Clase VI son caracterizados por un proceso estocástico de la forma

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp \{j(2\pi f_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \quad (3.60)$$

Su ACF se define como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t_1)\hat{\mu}(t_2)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.60) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n^* \exp \{-j(2\pi f_n t_1 + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N \mathbf{c}_m \exp \{j(2\pi f_m t_2 + \boldsymbol{\theta}_m)\} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp \{j2\pi(f_m t_2 - f_n t_1)\} E\{\mathbf{c}_n^*\} E\{\mathbf{c}_m\} E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Si $n = m$

$$E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 1 \quad (3.62)$$

$$E\{\mathbf{c}_n^*\} E\{\mathbf{c}_n\} = (\sigma_c^2 + m_c^2) \quad (3.63)$$

entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \exp \{j2\pi f_n \tau\} (\sigma_c^2 + m_c^2) \quad (3.64)$$

Si $n \neq m$

$$E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 0 \quad (3.65)$$

entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = 0 \quad (3.66)$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.64) y (3.66), tenemos que

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \exp \{j2\pi f_n \tau\} (\sigma_c^2 + m_c^2) \quad (3.67)$$

Podemos concluir, de la Ecuación anterior, que los simuladores de SOC Clase VI están definidos por un conjunto de procesos que no son AE debido a las razones establecidas al final de los simuladores Clase V.

La media para esta clase se define como $m_{\hat{\mu}}(t) \triangleq E\{\hat{\mu}(t)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.60) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\mu}}(t) &= E \left\{ \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \exp \{j2\pi \mathbf{f}_n t\} E\{\mathbf{c}_n\} E\{\exp j\boldsymbol{\theta}_n\} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Como ya vimos en el Capítulo anterior en la Ecuación (2.14), $E\{\exp \{j\boldsymbol{\theta}_n\}\} = 0$, entonces tenemos que

$$m_{\hat{\mu}}(t) = 0 \quad (3.69)$$

Como $m_{\hat{\mu}}$ no depende del tiempo y, como se observa en la Ecuación (3.67), la ACF de esta clase de modelos de simulación de SOC es TSI, podemos concluir que los modelos de simulación de la Clase VI son procesos aleatorios WSS y ME.

Clase VII de Simuladores de Canal: Esta clase de simuladores son caracterizados por un proceso estocástico de la forma

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \quad (3.70)$$

Su ACF se define como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t_1)\hat{\mu}(t_2)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.70) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n^* \exp \{-j(2\pi \mathbf{f}_n t_1 + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N \mathbf{c}_m \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_m t_2 + \boldsymbol{\theta}_m)\} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp \{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\} E\{\mathbf{c}_n^*\} E\{\mathbf{c}_m\} E\{\exp \{j2\pi(\mathbf{f}_m t_2 - \mathbf{f}_n t_1)\}\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Si $n = m$

$$E\{\mathbf{c}_n^*\} E\{\mathbf{c}_n\} = (\sigma_c^2 + m_c^2) \quad (3.72)$$

$$E\{\exp \{j2\pi(\mathbf{f}_n t_2 - \mathbf{f}_n t_1)\}\} = E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\}\} \quad (3.73)$$

entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\}\} (\sigma_c^2 + m_c^2) \quad (3.74)$$

Y por el resultado de la Ecuación (3.29) tenemos

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \frac{(\sigma_c^2 + m_c^2)}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(\tau) \quad (3.75)$$

Si $n \neq m$

$$E\{\mathbf{c}_n^*\}E\{\mathbf{c}_m\} = m_c^2 \quad (3.76)$$

entonces

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp\{j(\theta_m - \theta_n)\} m_c^2 E\{\exp\{j2\pi(\mathbf{f}_m t_2 - \mathbf{f}_n t_1)\}\} \\ &= \left[\sum_{n=1}^N E\{\exp\{j2\pi \mathbf{f}_n t_1\}\} \exp\{j\theta_n\} \right]^* \\ &\quad \left[\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N E\{\exp\{j2\pi \mathbf{f}_m t_2\}\} \exp\{j\theta_m\} \right] m_c^2 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Y por el resultado de la Ecuación (3.29) tenemos que

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(t_1) \exp\{j\theta_n\} \right]^* \\ &\quad \left[\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{1}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(t_2) \exp\{j\theta_m\} \right] m_c^2 \\ &= \frac{m_c^2}{\sigma_\mu^4} r_{\mu\mu}^*(t_1) r_{\mu\mu}(t_2) \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp\{j(\theta_m - \theta_n)\} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.75) y (3.78), tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{(\sigma_c^2 + m_c^2)}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_c^2}{\sigma_\mu^4} r_{\mu\mu}^*(t_1) r_{\mu\mu}(t_2) \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \exp\{j(\theta_m - \theta_n)\} \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

De la Ecuación anterior, podemos decir que la ACF de los simuladores Clase VII es TSI con la condición de que $m_c = 0$, como en el caso de los simuladores Clase V. Si esta condición se cumple y $\sigma_c^2 = \sigma_\mu^2/N$, entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = r_{\mu\mu}(\tau) \quad (3.80)$$

En otro caso, $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ no es un proceso AE.

La media para esta clase se define como $m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t) \triangleq E\{\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.70) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t) &= E \left\{ \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \theta_n)\} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \exp \{j\theta_n\} E\{\mathbf{c}_n\} E\{\exp \{j2\pi \mathbf{f}_n t\}\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Como $E\{\mathbf{c}_n\} = m_c$ y por el resultado en la Ecuación (3.29) tenemos que

$$m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t) = \sum_{n=1}^N \exp \{j\theta_n\} m_c \frac{r_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}}(t)}{\sigma_{\boldsymbol{\mu}}^2} \quad (3.82)$$

Estrictamente, como $m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t)$ depende del tiempo, podemos concluir que los simuladores de SOC Clase VII no son procesos aleatorios WSS ni ME. Pero $m_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t)$ es independiente del tiempo si $m_c = 0$, entonces podemos concluir bajo esta condición que los simuladores de SOC Clase VII son procesos ME. Además, basándonos en los resultados presentados en la Ecuación (3.79), podemos concluir que los simuladores de SOC de esta clase también son procesos WSS si y sólo si $m_c = 0$.

Clase VIII de Simuladores de Canal: Los modelos de simulación de la Clase VIII están caracterizados por un proceso aleatorio de la forma

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\} \quad (3.83)$$

Su ACF se define como $r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) \triangleq E\{\hat{\boldsymbol{\mu}}^*(t_1)\hat{\boldsymbol{\mu}}(t_2)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.83) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} r_{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}(t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n^* \exp \{-j(2\pi \mathbf{f}_n t_1 + \boldsymbol{\theta}_n)\} \right] \left[\sum_{m=1}^N \mathbf{c}_m \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_m t_2 + \boldsymbol{\theta}_m)\} \right] \right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} E\{\mathbf{c}_n^*\} E\{\mathbf{c}_m\} \\ &\quad \times E\{\exp \{j2\pi(\mathbf{f}_m t_2 - \mathbf{f}_n t_1)\}\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Si $n = m$

$$E\{\exp \{j(\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 1 \quad (3.85)$$

$$E\{\mathbf{c}_n^*\} E\{\mathbf{c}_n\} = (\sigma_c^2 + m_c^2) \quad (3.86)$$

entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N (\sigma_c^2 + m_c^2) E\{\exp\{j2\pi \mathbf{f}_n \tau\}\} \quad (3.87)$$

Y por el resultado de la Ecuación (3.29) tenemos

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \frac{(\sigma_c^2 + m_c^2)}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(\tau) \quad (3.88)$$

Si $n \neq m$

$$E\{\exp\{j(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_n)\}\} = 0 \quad (3.89)$$

entonces

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = 0 \quad (3.90)$$

Finalmente, juntando los resultados de las Ecuaciones (3.88) y (3.90), tenemos que

$$r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^N \frac{(\sigma_c^2 + m_c^2)}{\sigma_\mu^2} r_{\mu\mu}(\tau) \quad (3.91)$$

Nuevamente, la igualdad $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) = r_{\mu\mu}(\tau)$ se cumple si $m_c = 0$ y $\sigma_c^2 = \sigma_\mu^2/N$. Cabe señalar que en contraste con los simuladores Clase VII, la ACF de los simuladores Clase VIII es TSI aunque $m_c \neq 0$. Sin embargo, los modelos de simulación de la Clase VIII no son procesos AE.

La media para esta clase se define como $m_{\hat{\mu}}(t) \triangleq E\{\hat{\mu}(t)\}$. Sustituyendo la Ecuación (3.83) en la definición tenemos

$$\begin{aligned} m_{\hat{\mu}}(t) &= E\left\{\sum_{n=1}^N \mathbf{c}_n \exp\{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \boldsymbol{\theta}_n)\}\right\} \\ &= \sum_{n=1}^N E\{\exp\{j\boldsymbol{\theta}_n\}\} E\{\mathbf{c}_n\} E\{\exp\{j2\pi \mathbf{f}_n t\}\} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Como ya vimos en el Capítulo anterior en la Ecuación (2.14), $E\{\exp\{j\boldsymbol{\theta}_n\}\} = 0$, entonces tenemos que

$$m_{\hat{\mu}}(t) = 0 \quad (3.93)$$

Como $m_{\hat{\mu}}$ no depende del tiempo y, como vimos en la Ecuación (3.91), la ACF de esta clase de modelos de simulación de SOC es TSI, podemos concluir que los modelos de simulación de la Clase VIII son procesos aleatorios WSS y ME.

La Clase VIII es prácticamente el modelo de referencia y su importancia radica en que podemos ajustar de diversas maneras cualquiera de los parámetros de los cisoides.

La Tabla 3.2 muestra en resumen las clases de modelos de SOC y sus propiedades estadísticas.

Tabla 3.2: Clases de modelos de simulación de canal de SOC y sus propiedades de estacionariedad y ergodicidad.

Parámetros	Ganancias	Frecuencias	Fases	WSS	ME	AE
Clase I	Determinista	Determinista	Determinista	-	-	-
Clase II	Determinista	Determinista	Aleatorio	Si	Si	Si
Clase III	Determinista	Aleatorio	Determinista	No/Si	No/Si	No
Clase IV	Determinista	Aleatorio	Aleatorio	Si	Si	No
Clase V	Aleatorio	Determinista	Determinista	No/Si	No/Si	No
Clase VI	Aleatorio	Determinista	Aleatorio	Si	Si	No
Clase VII	Aleatorio	Aleatorio	Determinista	No/Si	No/Si	No
Clase VIII	Aleatorio	Aleatorio	Aleatorio	Si	Si	No

3.4. Métodos de Parametrización Importantes para Simuladores de Canal de SOC

Una vez que ha sido definida la estructura del modelo de simulación de SOC, el problema consiste en encontrar valores para los parámetros de los cisoides que permitan una simulación adecuada del modelo de referencia. Básicamente, el problema radica en la especificación de las ganancias y las frecuencias Doppler del componente aleatorio del modelo de simulación $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$, de tal manera que las propiedades estadísticas de $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ se asemejen a las del modelo de referencia. El cálculo de las fases no requiere de especial atención, ya que esos parámetros han sido definidos como variables aleatorias i.i.d..

Actualmente, existen varios métodos adecuados para el cálculo de las ganancias y frecuencias Doppler de $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$, entre algunos se encuentran el Método de Dispersión Doppler Exacto (MEDS, por sus siglas en Inglés), el Método de la Norma L_p (LPNM, por sus siglas en Inglés), el Método Generalizado de Áreas Iguales (GMEA, por sus siglas en Inglés) y el RSM. El MEDS fue propuesto en [73] para simuladores de canal de SOC. El LPNM fue propuesto en [73] como un método de cálculo de parámetros para los modelos de SOS, el enfoque fue aplicado después en [28] para diseñar modelos de canal de SOC. El GMEA es una generalización del Método de Áreas Iguales (MEA, por sus siglas en Inglés) propuesto en [19]. Originalmente, el MEA fue concebido para el diseño de simuladores de SOS con DPSD's simétricas, lo que significa que si las DPSD's de los simuladores eran asimétricas el método no podía ser empleado. El GMEA fue propuesto en [37, 39, 64]. El RSM fue propuesto en [45, 74] para simuladores de canal de SOC. A continuación se describen las características de estos métodos de parametrización.

3.4.1. Generalidades de los Métodos de Parametrización para Simuladores de Canal de SOC

MEDS: En el caso del MEDS los parámetros c_n y f_n se definen como

$$c_n = \sigma_\mu \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.94)$$

$$f_n = f_{\max} \sin \left(\frac{\pi}{2N} \left[n - \frac{1}{2} \right] \right), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.95)$$

El MEDS reproduce la dispersión Doppler de modelos de canal con dispersión isotrópica.

LPNM: El LPNM define las ganancias c_n como

$$c_n = \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{N}}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.96)$$

pero los parámetros f_n deben ser calculados de tal manera que se minimice la función de error de la norma L_p definida en la siguiente Ecuación

$$\epsilon_{r_{\mu\mu}}^{(p)} \triangleq \left\{ \frac{1}{\tau_{\max}} \int_0^{\tau_{\max}} |r_{\mu\mu}(\tau) - r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)|^p d\tau \right\}^{1/p} \quad (3.97)$$

donde p es un entero no negativo y $\tau_{\max} > 0$ determina el tamaño del intervalo $[0, \tau_{\max}]$ dentro del cual la aproximación $r_{\mu\mu}(\tau) \approx r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ es de interés. La minimización de $\epsilon_{r_{\mu\mu}}^{(p)}$ se hace aplicando un algoritmo de optimización numérico propuesto en [75] el cual es implementado con la función `fminsearch` de MATLAB[®].

GMEA: Para GMEA, las ganancias de los cisoides se definen como en la Ecuación (3.96). En lo que respecta al cálculo de las frecuencias Doppler f_n , recordemos que la ACF de $\boldsymbol{\mu}(t)$ está dada en términos de la PDF $p_\alpha(\alpha)$ de los AOA's α_n , o específicamente, en términos de la parte par $g_\alpha(\alpha)$ de $p_\alpha(\alpha)$. Por otro lado, la ACF de $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ esta completamente especificada por los parámetros c_n , f_n y N . En vista de esto, es razonable pensar que con el fin de que $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ se asemeje a la ACF $r_{\mu\mu}(\tau)$ del modelo de referencia para un cierto valor de N , las ganancias y las frecuencias Doppler de $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ deben dar información sobre la función $g_\alpha(\alpha)$. Por este razonamiento y como las ganancias descritas en la Ecuación (3.96) son ajenas a las estadísticas del AOA, se calculan las frecuencias Doppler de $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ de tal manera que los AOA's α_n de $\hat{\boldsymbol{\mu}}(t)$ puedan encontrarse resolviendo numéricamente la siguiente Ecuación

$$\int_0^{\alpha_n} g_\alpha(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2N} \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.98)$$

RSM: Para el RSM, se suele asumir que la PDF del AOA $p_{\alpha}(\alpha)$ no tiene singularidades, de modo que la integral descrita en la Ecuación (2.32) se puede considerar propia. Bajo esta consideración la ACF $r_{\mu\mu}(\tau)$ puede ser escrita como una suma de Riemann de medio punto de la siguiente manera

$$r_{\mu\mu}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi\sigma_{\mu}^2}{N} \sum_{n=1}^N g_{\alpha} \left(\frac{\pi}{N} \left[n - \frac{1}{2} \right] \right) \times \exp \left\{ j2\pi f_{\max} \cos \left(\frac{\pi}{N} \left[n - \frac{1}{2} \right] \right) \tau \right\} \quad (3.99)$$

Si quitamos el límite $N \rightarrow \infty$ de la Ecuación de arriba, entonces

$$r_{\mu\mu}(\tau) \approx \frac{2\pi\sigma_{\mu}^2}{N} \sum_{n=1}^N g_{\alpha} \left(\frac{\pi}{N} \left[n - \frac{1}{2} \right] \right) \times \exp \left\{ j2\pi f_{\max} \cos \left(\frac{\pi}{N} \left[n - \frac{1}{2} \right] \right) \tau \right\} \quad (3.100)$$

Una comparación de la Ecuación (3.22) y la Ecuación (3.100) sugiere que la ACF $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ hará una buena aproximación a $r_{\mu\mu}(\tau)$ si escogemos

$$f_n = f_{\max} \cos \left(\frac{\pi}{N} \left[n - \frac{1}{2} \right] \right), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.101)$$

$$c_n = \sigma_{\mu} \sqrt{\frac{g_{\alpha}(\alpha_n)}{\sum_{m=1}^N g_{\alpha}(\alpha_m)}}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.102)$$

La metodología dada por las Ecuaciones (3.101) y (3.102) establece el método de parametrización que se conoce como Método de Suma de Riemann Básico (BRSM, por sus siglas en Inglés).

3.5. Análisis de la Precisión del Método de Parametrización RSM

La finalidad de revisar los métodos de parametrización más importantes para los simuladores de canal de SOC es, más que proponer un método, sentar las bases para el posterior desarrollo de un nuevo método de parametrización analizando sus prestaciones mediante la comparación de curvas y mediante la medición de normas de error. Actualmente no existe una métrica o algún procedimiento estándar para la evaluación de la precisión del método de parametrización. En esta tesis se considera la hipótesis de que los métodos de parametrización de SOC se pueden ver como métodos de integración numérica como en el caso de la suma de Riemann, en ese sentido las prestaciones del método se pueden analizar utilizando las herramientas convencionales de métodos numéricos. En esta Sección se explora esta hipótesis y se presenta un análisis del error que se observa en la aproximación a la ACF del canal cuando se aplica suma de Riemann. La idea básica consiste en aproximar

la ACF del canal, la cual es una integral, mediante una suma de Riemann y en base a eso calcular el error de dicha estimación con respecto al valor exacto de la integral. La integral se puede representar como una suma infinita de términos (Serie de Taylor) para obtener una expresión del error. Los términos se calculan mediante las derivadas de la función para un determinado valor de la variable, lo que involucra puntos específicos sobre la función. Esta representación tiene tres ventajas importantes:

- La derivación e integración de las series se puede calcular término a término mediante operaciones elementales.
- A partir de la función expresada como una Serie de Taylor, se pueden obtener aproximaciones de la función misma y su integral con una precisión determinada.
- Se puede demostrar que si una función se puede transformar en una Serie de Taylor (si es infinitamente diferenciable), esta es la aproximación óptima cuando el número de términos de la serie tiende a infinito.

En base a lo anterior, de manera general podemos escribir la integral que representa la ACF del canal como una Serie de Taylor como sigue

$$\begin{aligned} \int_0^h f(x_r + t) dt &= \int_0^h \left(f(x_r) + t f'(x_r) + \frac{t^2}{2!} f''(x_r) + \frac{t^3}{3!} f'''(x_r) + O(t^4) \right) dt \\ &= h f(x_r) + \frac{h^2}{2} f'(x_r) + \frac{h^3}{6} f''(x_r) + \frac{h^4}{24} f'''(x_r) + O(h^5) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Ahora aplicando la suma de Riemann en el punto medio para un intervalo tenemos

$$\begin{aligned} h f\left(x_r + \frac{h}{2}\right) &= h \left[f(x_r) + \frac{h}{2} f'(x_r) + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(x_r) + \frac{1}{3!} \left(\frac{h}{2}\right)^3 f'''(x_r) + O(h^4) \right] \\ &= h f(x_r) + \frac{h^2}{2} f'(x_r) + \frac{h^3}{8} f''(x_r) + \frac{h^4}{48} f'''(x_r) + O(h^5) \end{aligned} \quad (3.104)$$

Con respecto a las expresiones anteriores podemos ver que a pesar de su semejanza, a partir del tercer término en ambas expresiones existe una diferencia entre la integral real, Ecuación (3.103), y la estimada mediante suma de Riemann, Ecuación (3.104). De esa diferencia podemos deducir que el término de error para un intervalo es aproximadamente

$$\epsilon = \frac{h^3}{24} f''(x_r) + O(h^4) \quad (3.105)$$

donde $h = \pi/N$ y N es el número de intervalos para la integración. Es importante aclarar que la expresión en la Ecuación (3.105) es la que comúnmente se utiliza para funciones reales. De manera que sustituyendo h en la suma de Riemann tenemos

$$h f\left(x_r + \frac{h}{2}\right) = \frac{\pi}{N} f\left(\frac{r\pi}{N} + \frac{\pi}{2N}\right) \quad (3.106)$$

Con lo cual la expresión del error es

$$\epsilon = \frac{\pi^3}{24N^3} f'' \left(\frac{r\pi}{N} \right) \quad (3.107)$$

Ahora aplicando lo anterior para cualquier número de intervalos equiespaciados obtenemos que

$$\int_0^\pi f(x) dx = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\pi}{N} f \left(\frac{r\pi}{N} + \frac{\pi}{2N} \right) \quad (3.108)$$

$$\epsilon = \frac{\pi^3}{24N^3} \sum_{r=0}^{N-1} f'' \left(\frac{r\pi}{N} \right) \quad (3.109)$$

Dado que la expresión a integrar es compleja entonces el término de error finalmente es

$$\epsilon = \frac{\pi^3}{24N^3} \sum_{r=0}^{N-1} \left| f'' \left(\frac{r\pi}{N} \right) \right|^2 \quad (3.110)$$

La integral que queremos aproximar se describe a continuación

$$r_{\mu\mu}(\tau) = 2\sigma_\mu^2 \int_0^\pi g_\alpha(\alpha) \exp \{j2\pi f_{\max} \cos(\alpha)\tau\} d\alpha \quad (3.111)$$

donde g_α es la parte par de la PDF del AOA $p_\alpha(\alpha)$. Considerando la distribución von Mises para modelar las estadísticas del AOA tenemos que la parte par de dicha PDF es

$$g_\alpha^{VM}(\alpha) = \frac{\exp \{k \cos(\alpha) \cos(m_\alpha)\}}{2\pi I_0(k)} \times \cosh(k \sin(\alpha) \sin(m_\alpha)) \quad (3.112)$$

para $\alpha \in [-\pi, \pi)$. El parámetro $m_\alpha \in [-\pi, \pi)$ es la media del AOA y $k \geq 0$ determina la dispersión angular. Sustituyendo la Ecuación (3.112) en la Ecuación (3.111) obtenemos una expresión cerrada para dicha integral la cual se muestra a continuación

$$r_{\mu\mu}(\tau) = \frac{\sigma_\mu^2}{I_0(k)} I_0(\{k^2 - (2\pi f_{\max} \tau)^2 + j4\pi k f_{\max} \cos(m_\alpha) \tau\}^{1/2}) \quad (3.113)$$

la cual compararemos con nuestra estimación aplicando la suma de Riemann. Sustituyendo g_α en la Ecuación (3.111) tenemos el siguiente resultado

$$\begin{aligned} r_{\mu\mu}(\tau) &= c \int_0^\pi \exp \{a \cos(\alpha)\} (\exp \{b \sin(\alpha)\} + \exp \{-b \sin(\alpha)\}) \\ &\quad \times \exp \{jA \cos(\alpha)\} d\alpha \end{aligned} \quad (3.114)$$

donde $a = k \cos(m_\alpha)$, $b = k \sin(m_\alpha)$, $c = \sigma_\mu^2 / 2\pi I_0(k)$ y $A = 2\pi f_{\max} \tau$. Aplicando la identidad de Euler tenemos que

$$r_{\mu\mu}(\tau) = c \int_0^\pi (\exp \{a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha)\} + \exp \{a \cos(\alpha) - b \sin(\alpha)\}) [\cos(A \cos(\alpha)) + j \sin(A \cos(\alpha))] d\alpha \quad (3.115)$$

Tomando en cuenta la siguiente identidad

$$z \cos(x) + w \sin(x) = R \cos(x - \phi) \quad (3.116)$$

donde $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z = R \cos(\phi)$, $w = R \sin(\phi)$ y $\phi = \arctan(w/z)$, tenemos que $r_{\mu\mu}(\tau)$ se reduce a

$$r_{\mu\mu}(\tau) = c \int_0^\pi (\exp \{k \cos(\alpha - m_\alpha)\} + \exp \{k \cos(\alpha + m_\alpha)\}) [\cos(A \cos(\alpha)) + j \sin(A \cos(\alpha))] d\alpha \quad (3.117)$$

De lo anterior se puede demostrar que, tomando al argumento de la integral como $f(\alpha)$, las segundas derivadas de la parte real y de la parte imaginaria de $f(\alpha)$ respectivamente son

$$\begin{aligned} f_r''(\alpha) &= [A \cos(\alpha) \sin(A \cos(\alpha)) - A^2 \sin^2(\alpha) \cos(A \cos(\alpha))] \\ &\quad \times [\exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} + \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\}] \\ &\quad + \cos(A \cos(\alpha)) [k^2 \sin^2(m_\alpha - \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} \\ &\quad + k^2 \sin^2(m_\alpha + \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\} \\ &\quad - k \cos(m_\alpha - \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} \\ &\quad - k \cos(m_\alpha + \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\}] \\ &\quad + 2A \sin(\alpha) \sin(A \cos(\alpha)) [k \sin(m_\alpha - \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} \\ &\quad - k \sin(m_\alpha + \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\}] \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} f_i''(\alpha) &= [-A^2 \sin^2(\alpha) \sin(A \cos(\alpha)) - A \cos(\alpha) \cos(A \cos(\alpha))] \\ &\quad \times [\exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} + \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\}] \\ &\quad + \sin(A \cos(\alpha)) [k^2 \sin^2(m_\alpha - \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} \\ &\quad + k^2 \sin^2(m_\alpha + \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\} \\ &\quad - k \cos(m_\alpha - \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} \\ &\quad - k \cos(m_\alpha + \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\}] \\ &\quad - 2A \sin(\alpha) \cos(A \cos(\alpha)) [k \sin(m_\alpha - \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha - \alpha)\} \\ &\quad - k \sin(m_\alpha + \alpha) \exp \{k \cos(m_\alpha + \alpha)\}] \end{aligned} \quad (3.119)$$

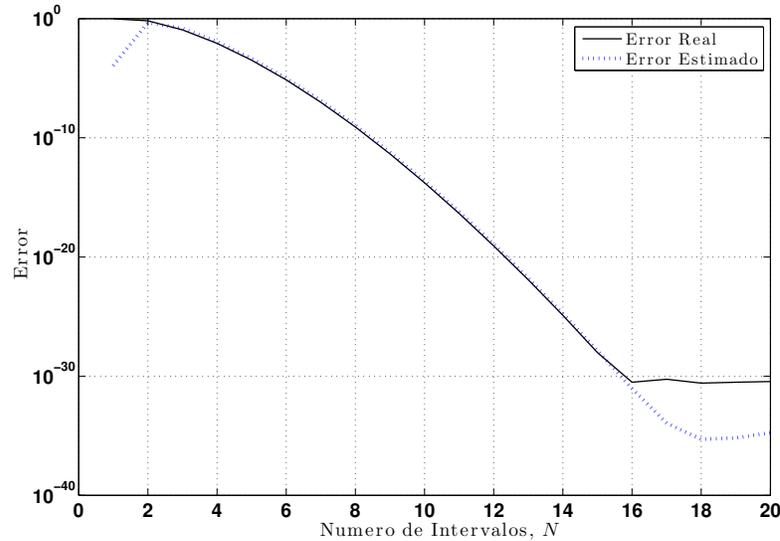


Figura 3.2: Comparativa entre el error real y el error estimado aplicando suma de Riemann.

Evaluando numéricamente la Ecuación (3.113) y comparándola con la evaluación numérica de las Ecuaciones (3.118) y (3.119) bajo la siguiente consideración

$$|f''(x)|^2 = (f_r''(x))^2 + (f_i''(x))^2 \quad (3.120)$$

obtenemos el resultado que se observa en la Figura 3.2. La cual se obtuvo con los siguientes valores de los parámetros: $k = 10$, $m_\alpha = 0$, $f_{\max} = 91$.

De la Figura 3.2 podemos observar que para un solo intervalo la estimación del error es mala. También que tomando de 2 hasta 16 intervalos, la estimación del error que se observa se ajusta muy bien con el error real y que el comportamiento que se observa al final de la curva, en el caso de la integración numérica, es por que se ha llegado a la precisión de la máquina (10^{-32}) y ya no se obtienen resultados precisos de la estimación del error, pero, tomando en cuenta dicha restricción, podemos ver que el valor óptimo de intervalos es 16.

Estos resultados se pueden utilizar para optimizar el número de intervalos (número de cisoides) necesarios para obtener una buena aproximación a la ACF del modelo de referencia, puesto que reduce la complejidad del simulador.

3.6. Conclusiones

En este Capítulo, mostramos que los modelos de SOC dependen de tres tipos de parámetros (ganancias, frecuencias y fases) y que cada tipo de estos parámetros puede ser introducido como una variable aleatoria o como una cantidad constante. Debido a esto, basándose en el carácter aleatorio o determinista de estos parámetros, se pueden identificar $2^3 = 8$ clases de modelos de canal de SOC en total: Siete clases de modelos de SOC estocásticos y una clase de modelo de SOC determinista.

Se analizaron las propiedades estadísticas de las ocho clases de modelos de simulación de canal de SOC para saber cuáles de ellas presentaban la estacionariedad en el sentido amplio, la ergodicidad en media y la ergodicidad en la función de autocorrelación. Los resultados obtenidos demuestran que sólo el modelo de simulación de SOC Clase II definido por ganancias y frecuencias Doppler constantes y fases aleatorias posee la propiedad de AE. También podemos concluir que los modelos de simulación de SOC Clase II, IV, VI y VIII son procesos WSS y ME y tienen en común que tienen fases aleatorias.

Además, presentamos algunos de los métodos de parametrización importantes para simuladores de canal de SOC ergódicos que se utilizan para obtener los valores de los parámetros de los cisoides que permiten una simulación apropiada del modelo de referencia.

Capítulo 4

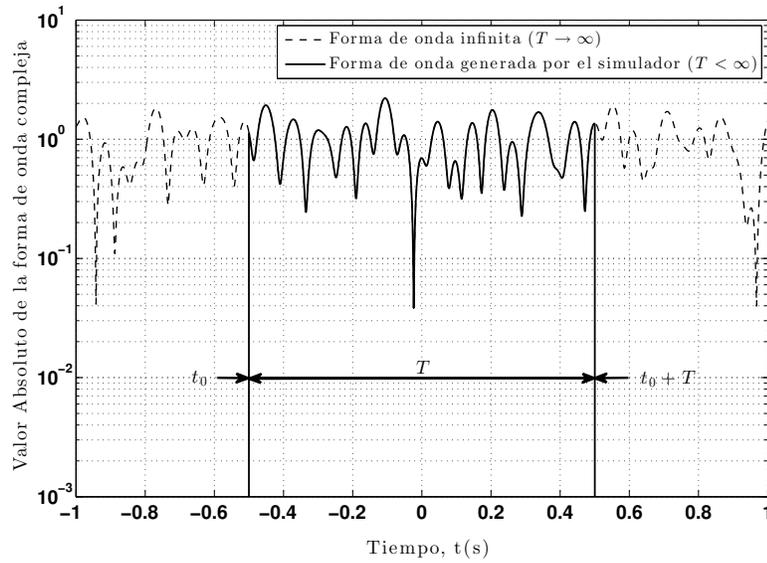
Análisis de la Clases de Simuladores de SOC bajo Restricciones Prácticas

En este capítulo se hace un análisis de las clases de modelos de simulación de SOC bajo restricciones prácticas. En concreto, se considera el caso cuando la longitud de las formas de onda generadas por el simulador es pequeña. Se analiza la manera en que afecta esto en las propiedades de estacionariedad y ergodicidad de los modelos de SOC ergódicos y no ergódicos. Los resultados que se presentan en este Capítulo constituyen la principal contribución original de este trabajo de tesis.

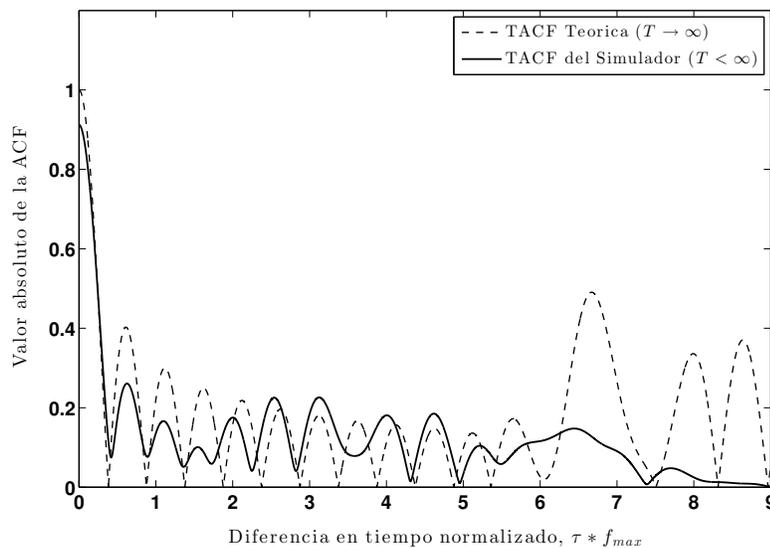
4.1. Introducción

Los simuladores de canal basados en procesos de SOC han sido propuestos en diversos artículos como una solución para aproximar con mayor precisión la ACF del canal. Sin embargo, a pesar de los resultados alentadores en la literatura, no queda claro si las prestaciones teóricas de estos simuladores se mantienen en la práctica, donde, en contraste con lo que la teoría asume, las formas de onda generadas por el simulador tienen longitudes finitas. La Figura 4.1 nos muestra un escenario de lo que sucede cuando se restringe la longitud de las formas de onda a un intervalo finito $[t_0, t_0 + T]$, donde $0 < T < \infty$ y t_0 es tiempo inicial de la simulación. En base a la Figura 4.1, podemos observar que la TACF del simulador de los modelos tanto ergódicos como no ergódicos es diferente de la TACF teórica. Esto resulta en un error de simulación que no se suele considerar en los análisis del rendimiento de sistemas de comunicaciones inalámbricos que se han propuesto en la literatura. Podemos ver que, para un valor finito de T , las formas de onda generadas por el simulador tienen una TACF $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ que es básicamente una estimación de $r_{\mu\mu}(\tau)$.

Por lo antes dicho, es fundamental caracterizar las degradaciones en la TACF que se observan al restringir la duración de dichas formas de onda. Es por ello que, en este Capítulo, se presenta un análisis del error observado cuando la TACF, de procesos ergódicos y no ergódicos, es calculada a partir de funciones muestrales de procesos estocásticos de SOC cuyos conjuntos índices se extienden sobre un intervalo finito.



(a) Forma de onda finita generada por el simulador.



(b) TACF de la forma de onda finita generada por el simulador.

Figura 4.1: Ejemplo de las degradaciones en la TACF al restringir la duración de T .

El análisis se llevó a cabo calculando el error instantáneo producido por dos estimadores diferentes, llamados estimador sesgado (BE, por sus siglas en Inglés) y el estimador insesgado (UE, por sus siglas en Inglés). Calculamos el error instantáneo de cada estimador el cual resulta ser un proceso estocástico. Partiendo del error de estimación, se derivan

expresiones compactas para algunas cantidades estadísticas relevantes tales como la media, la varianza y el error cuadrático medio. Además, comparamos el desempeño de los dos estimadores en términos de su exactitud.

4.2. Modelos de Simulación de Canal de SOC Ergódicos y no Ergódicos

Nuestro análisis se llevó a cabo tomando en consideración un modelo de simulación de SOC Clase II y un modelo de simulación de SOC Clase IV. Nuestra motivación para elegir un modelo de SOC Clase II es impulsado por el hecho de que sólo los simuladores Clase II son procesos AE dada la restricción $N < \infty$, como se demostró en el Capítulo anterior. Esta propiedad permite diseñar modelos de simulación capaces de aproximarse de manera eficiente a la ACF del modelo de referencia sin la necesidad de promediar varias realizaciones. Por otro lado, se toma un modelo de SOC Clase IV para el estudio por ser la de mayor presencia en la literatura, de fácil implementación en comparación a las clases VI y VIII y porque presenta ergodicidad en la media a diferencia de las clases III, V y VII. La Clase IV se le conoce también como modelo de simulación de Montecarlo. Para simplificar nuestra discusión, en lo sucesivo nos referiremos a los modelos de SOC Clase II como modelos ergódicos y a los modelos de SOC Clase IV como modelos no ergódicos.

4.2.1. Modelo de Simulación Ergódico

El modelo de simulación ergódico está caracterizado de la siguiente manera

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \quad (4.1)$$

donde las fases θ_n son variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas sobre $[-\pi, \pi)$, mientras que las ganancias c_n y las frecuencias Doppler f_n son cantidades constantes que satisfacen las siguientes condiciones

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 = \sigma_{\mu}^2, \quad 0 < \sigma_{\mu}^2 < \infty \quad (4.2)$$

$$f_n \neq 0, \quad \forall n \quad (4.3)$$

$$f_n \neq f_m, \quad n \neq m \quad (4.4)$$

$$|f_n| < f_{\max}, \quad \forall n \quad (4.5)$$

donde σ_{μ}^2 es una constante igual a la potencia promedio del canal (varianza). Las formas de onda generadas por el modelo de simulación ergódico son caracterizadas por un proceso

determinista complejo $\hat{\mu}(t)$ que está dado como

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi f_n t + \theta_n)\} \quad (4.6)$$

donde los parámetros constantes θ_n son resultado de fases aleatorias θ_n . La ACF de ensamble de la expresión en la Ecuación (4.1) está dada como

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) &\triangleq E\{\hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t+\tau)\} \\ &= \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp \{j2\pi f_n \tau\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por otro lado la TACF de las funciones muestrales de la Ecuación (4.6) es igual a

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) &\triangleq \langle \hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t+\tau) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t+\tau) dt \\ &= \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp \{j2\pi f_n \tau\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2.2. Modelo de Simulación no Ergódico

El modelo de simulación no ergódico está caracterizado de la siguiente manera

$$\hat{\mu}(t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp \{j(2\pi \mathbf{f}_n t + \theta_n)\} \quad (4.9)$$

el cual presenta frecuencias \mathbf{f}_n y fases θ_n aleatorias, las ganancias c_n son constantes y también satisfacen la Ecuación (4.2) y tiene formas de onda como las descritas en la Ecuación (4.6) sólo que esta vez las frecuencias f_n son salidas de las frecuencias aleatorias \mathbf{f}_n y las fases θ_n son salidas de las fases aleatorias θ_n . La ACF de ensamble de la Ecuación (4.9) se define como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \triangleq E\{\hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t+\tau)\}$ y el resultado es igual a

$$\begin{aligned} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) &= \sum_{n=1}^N c_n^2 E\{\exp \{j2\pi f_n \tau\}\} \\ &= r_{\mu\mu}(\tau) \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $r_{\mu\mu}(\tau)$, en el caso isotrópico, es igual a

$$\begin{aligned} r_{\mu\mu}(\tau) &= \sigma_\mu^2 E\{\exp \{j2\pi f_n \tau\}\} \\ &= \sigma_\mu^2 J_0(2\pi f_{max} \tau) \end{aligned} \quad (4.11)$$

La TACF de las funciones muestrales se define como $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \triangleq \langle \hat{\mu}^*(t)\hat{\mu}(t+\tau) \rangle$ y es igual a la expresión descrita en la Ecuación (4.8).

4.3. Análisis del Error Instantáneo en la Estimación de la TACF de Simuladores Ergódicos y no Ergódicos Aplicando el BE y el UE

4.3.1. Cálculo del Error Instantáneo del BE

La estimación sesgada es resultado únicamente de limitar la longitud de T en la Ecuación (4.8). De este modo, si la TACF del modelo de simulación es calculada siguiendo dicha estimación entonces la función de autocorrelación está dada como

$$\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau) \triangleq \frac{1}{T} \int_{t_0 + \frac{|\tau|}{2}}^{t_0 + T - \frac{|\tau|}{2}} \hat{\mu}^*(t - \frac{\tau}{2}) \hat{\mu}(t + \frac{\tau}{2}) dt \quad (4.12)$$

para $\tau \in [-T, T]$. Sustituyendo $\hat{\mu}(t)$ de la Ecuación (4.6) en la Ecuación (4.12) y desarrollando tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{t_0 + \frac{|\tau|}{2}}^{t_0 + T - \frac{|\tau|}{2}} \sum_{n=1}^N c_n^* \exp \left\{ -j(2\pi f_n(t - \frac{\tau}{2}) + \theta_n) \right\} \\ &\quad \times \sum_{m=1}^N c_m \exp \left\{ j(2\pi f_m(t + \frac{\tau}{2}) + \theta_m) \right\} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0 + \frac{|\tau|}{2}}^{t_0 + T - \frac{|\tau|}{2}} \sum_{n=1}^N c_n^* \exp \left\{ -j2\pi f_n t \right\} \exp \left\{ j2\pi f_n \frac{\tau}{2} \right\} \exp \left\{ -j\theta_n \right\} \\ &\quad \times \sum_{m=1}^N c_m \exp \left\{ j2\pi f_m t \right\} \exp \left\{ j2\pi f_m \frac{\tau}{2} \right\} \exp \left\{ j\theta_m \right\} dt \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n^* c_m \exp \left\{ j(\theta_m - \theta_n) \right\} \exp \left\{ j2\pi(f_m + f_n) \frac{\tau}{2} \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{T} \int_{t_0 + \frac{|\tau|}{2}}^{t_0 + T - \frac{|\tau|}{2}} \exp \left\{ j2\pi(f_m - f_n)t \right\} dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

Resolviendo la integral y desarrollando se llega a que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_{t_0 + \frac{|\tau|}{2}}^{t_0 + T - \frac{|\tau|}{2}} \exp \{j2\pi(f_m - f_n)t\} dt &= \frac{1}{j2\pi(f_m - f_n)T} \left[\exp \{j2\pi(f_m - f_n)(t_0 + T - \frac{|\tau|}{2})\} \right. \\
&\quad \left. - \exp \{j2\pi(f_m - f_n)(t_0 + \frac{|\tau|}{2})\} \right] \\
&= \exp \{j2\pi(f_m - f_n)(t_0 + \frac{T}{2})\} \\
&\quad \times \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \{j2\pi(f_m + f_n)\frac{\tau}{2}\} \\
&\quad \times \exp \{j2\pi(f_m - f_n)(t_0 + \frac{T}{2})\} \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Si $n = m$, $\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau)$ no se puede obtener directamente ya que

$$\frac{\sin(0)}{0} \tag{4.16}$$

no está determinado. Por ello es necesario definir el siguiente límite para evitar tal indeterminación

$$\lim_{\Delta_{mn} \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\Delta_{mn}(T - |\tau|))}{\pi\Delta_{mn}T} \tag{4.17}$$

donde $\Delta_{mn} = f_m - f_n$. Luego, por la Regla de L'Hôpital-Bernoulli, tenemos

$$\lim_{\Delta_{mn} \rightarrow 0} \frac{\pi(T - |\tau|) \cos(\pi\Delta_{mn}(T - |\tau|))}{\pi T} \tag{4.18}$$

Sustituyendo el límite llegamos a que

$$\frac{\pi(T - |\tau|) \cos(0)}{\pi T} = \frac{T - |\tau|}{T} \tag{4.19}$$

Por lo que, en este caso, $\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau)$ se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp \{j2\pi f_n \tau\} * \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \\
&= r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) * \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Si $n \neq m$, $\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau)$ simplemente es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \left\{ j2\pi(f_m + f_n) \frac{\tau}{2} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ j2\pi(f_m - f_n) \left(t_0 + \frac{T}{2} \right) \right\} \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Juntando los resultados de las Ecuaciones (4.20) y (4.21) finalmente llegamos a que

$$\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{BE}(\tau) = r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) + \boldsymbol{\epsilon}_r^{BE}(\tau) \quad (4.22)$$

donde $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ es la TACF definida en la Ecuación (4.8) y $\boldsymbol{\epsilon}_r^{BE}(\tau)$ es un término de error igual a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_r^{BE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \\ &\quad \times \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} - \frac{|\tau|}{T} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde

$$A_{n,m}(\tau) = \exp \left\{ j2\pi \left[f_m \left(t_0 + \frac{T + \tau}{2} \right) - f_n \left(t_0 + \frac{T - \tau}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.24)$$

Es importante señalar que, de manera general, el término del error mostrado en la Ecuación (4.23) es el mismo tanto para los simuladores ergódicos como para los simuladores no ergódicos. Pero, debido a la naturaleza particular de cada simulador, tendrán diferencias muy específicas en cada uno de los momentos estadísticos del error como veremos en las siguientes Secciones.

4.3.2. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el BE para Simuladores Ergódicos

Como $\boldsymbol{\epsilon}_r^{BE}(\tau)$ es un proceso estocástico, caracterizarlo requiere conocer sus PDF's conjuntas, o bien, sus momentos. En particular, de teoría de la estimación, los momentos relevantes son la media, la varianza y el error cuadrático medio (MSE, por sus siglas en Inglés). Los momentos estadísticos de la estimación del error pueden ser calculados de la expresión en la Ecuación (4.23). El valor medio de $\boldsymbol{\epsilon}_r^{BE}(\tau)$ se define como

$$m_{\boldsymbol{\epsilon}}^{BE}(\tau) \triangleq E\{\boldsymbol{\epsilon}_r^{BE}(\tau)\} \quad (4.25)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.23) en la definición se puede verificar que

$$m_{\epsilon}^{BE}(\tau) = E\left\{\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \times \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} - \frac{|\tau|}{T} r_{\hat{\mu}}(\tau)\right\} \quad (4.26)$$

Pero dado que en la Ecuación (2.22) se demostró que $E\{\exp(j(\theta_m - \theta_n))\} = 0$, $m \neq n$ entonces

$$m_{\epsilon}^{BE}(\tau) = -\frac{|\tau|}{T} r_{\hat{\mu}}(\tau) \quad (4.27)$$

donde $r_{\hat{\mu}}(\tau)$ es la TACF definida en la Ecuación (4.8). La varianza $V_{\epsilon}^{BE}(\tau)$ de $\epsilon_r^{BE}(\tau)$ se define como

$$V_{\epsilon}^{BE}(\tau) \triangleq E\{|\epsilon_r^{BE}(\tau) - m_{\epsilon}^{BE}(\tau)|^2\} \quad (4.28)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4.23) y (4.27) en la definición podemos ver que

$$\begin{aligned} V_{\epsilon}^{BE}(\tau) &= E\left\{\left|\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \times \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T}\right|^2\right\} \\ &= \left[\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n^* c_m^* \exp(-j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}^*(\tau) \times \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \times \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Desarrollando el producto se puede demostrar fácilmente que

$$V_{\epsilon}^{BE}(\tau) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 \times \frac{\sin^2(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{[\pi(f_m - f_n)T]^2} \quad (4.30)$$

Por otro lado, el MSE denotado por $M_{\epsilon}^{BE}(\tau)$, se define como

$$\begin{aligned} M_{\epsilon}^{BE}(\tau) &\triangleq E\{|\epsilon_r^{BE}(\tau)|^2\} \\ &= V_{\epsilon}^{BE}(\tau) + (m_{\epsilon}^{BE}(\tau))^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4.27) y (4.30) se puede ver que

$$M_{\epsilon}^{BE}(\tau) = \left(\frac{|\tau|}{T} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \right)^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 \times \frac{\sin^2(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{[\pi(f_m - f_n)T]^2} \quad (4.32)$$

En algunos casos se vuelve relevante evaluar el rendimiento del estimador dentro de un intervalo de aproximación finito, digamos $\tau \in [-\tau_{max}, \tau_{max}]$, donde $0 < \tau_{max} < T$, ya que es donde la relación $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}} \approx r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}$ resulta más importante. Esto puede ser realizado considerando la siguiente norma del error

$$\overline{M}_{\epsilon}^{BE}(\tau) \triangleq \frac{1}{\tau_{max}} \int_0^{\tau_{max}} M_{\epsilon}^{BE}(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

el cual proporciona una métrica del MSE promedio observado sobre el intervalo de aproximación $[-\tau_{max}, \tau_{max}]$.

4.3.3. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el BE para Simuladores no Ergódicos

El valor medio de $\epsilon_r^{BE}(\tau)$ para los simuladores no ergódicos se define como $m_{\epsilon}^{BE}(\tau) \triangleq E\{\epsilon_r^{BE}(\tau)\}$. Sustituyendo $\epsilon_r^{BE}(\tau)$ en la definición tenemos

$$m_{\epsilon}^{BE}(\tau) = E\left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \times \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} - \frac{|\tau|}{T} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \right\} \quad (4.34)$$

Por los resultados de la Sección anterior para el valor medio de $\epsilon_r^{BE}(\tau)$, tenemos que

$$m_{\epsilon}^{BE}(\tau) = E\left\{ -\frac{|\tau|}{T} r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \right\} \quad (4.35)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.8) en la Ecuación (4.35) tenemos

$$\begin{aligned} m_{\epsilon}^{BE}(\tau) &= -\frac{|\tau|}{T} \sum_{n=1}^N c_n^2 E\{\exp\{j2\pi f_n \tau\}\} \\ &= -\frac{|\tau|}{T} \sigma_{\mu}^2 E\{\exp\{j2\pi f_n \tau\}\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sustituyendo $r_{\mu\mu}(\tau)$ de la Ecuación (4.11) en la Ecuación (4.36) finalmente llegamos a que

$$m_{\epsilon}^{BE}(\tau) = -\frac{|\tau|}{T}r_{\mu\mu}(\tau) \quad (4.37)$$

donde $r_{\mu\mu}(\tau)$ es la ACF del modelo de canal de referencia. La varianza $V_{\epsilon}^{BE}(\tau)$ de $\epsilon_r^{BE}(\tau)$, se define como $V_{\epsilon}^{BE}(\tau) \triangleq E\{|\epsilon_r^{BE}(\tau) - m_{\epsilon}^{BE}(\tau)|^2\}$. Sustituyendo las Ecuaciones (4.23) y (4.37) en la definición se puede demostrar

$$\begin{aligned} V_{\epsilon}^{BE}(\tau) &= E\left\{\left|\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau)\right.\right. \\ &\quad \times \left.\left.\frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} - \frac{|\tau|}{T}r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) + \frac{|\tau|}{T}r_{\mu\mu}(\tau)\right|^2\right\} \\ &= \left[\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n^* c_m^* \exp(-j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}^*(\tau) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} - \frac{|\tau|}{T}r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^*(\tau) + \frac{|\tau|}{T}r_{\mu\mu}^*(\tau) \right] \\ &\quad * \left[\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T} - \frac{|\tau|}{T}r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) + \frac{|\tau|}{T}r_{\mu\mu}(\tau) \right] \quad (4.38) \end{aligned}$$

Desarrollando el producto es sencillo mostrar

$$\begin{aligned} V_{\epsilon}^{BE}(\tau) &= E\left\{\left|\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau)\right.\right. \\ &\quad \times \left.\left.\frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)T}\right|^2 + \left|\frac{|\tau|}{T}r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)\right|^2\right. \\ &\quad \left. + \left|\frac{|\tau|}{T}r_{\mu\mu}(\tau)\right|^2 - \frac{|\tau|}{T}r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^*(\tau)\frac{|\tau|}{T}r_{\mu\mu}(\tau) - \frac{|\tau|}{T}r_{\mu\mu}^*(\tau)\frac{|\tau|}{T}r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)\right\} \\ &= E\left\{\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 \times \frac{\sin^2(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{[\pi(f_m - f_n)T]^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{|\tau|^2}{T^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (c_n c_m)^2 \exp\{j2\pi(f_m - f_n)\tau\}\right. \\ &\quad \left. + \frac{|\tau|^2}{T^2} J_0(2\pi f_{\max}\tau)^2 - \frac{|\tau|^2}{T^2} J_0(2\pi f_{\max}\tau)^2 - \frac{|\tau|^2}{T^2} J_0(2\pi f_{\max}\tau)^2\right\} \quad (4.39) \end{aligned}$$

Entonces, simplificando y aplicando la esperanza a las variables aleatorias, llegamos a que

$$V_{\epsilon}^{BE}(\tau) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 E \left\{ \frac{\sin^2(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{[\pi(f_m - f_n)T]^2} \right\} \\ + \frac{|\tau|^2}{T^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (c_n c_m)^2 E \{ \exp \{ j2\pi(f_m - f_n)\tau \} \} - \frac{|\tau|^2}{T^2} J_0(2\pi f_{\max} \tau)^2 \quad (4.40)$$

Como $f_m = f_{\max} \cos(\alpha_m)$ y $f_n = f_{\max} \cos(\alpha_n)$ y aplicando el teorema del valor esperado de una función de dos variables aleatorias [51] la expresión anterior se reduce a

$$V_{\epsilon}^{BE}(\tau) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\pi f_{\max}(\cos(\alpha_m) - \cos(\alpha_n))(T - |\tau|))}{[\pi f_{\max}(\cos(\alpha_m) - \cos(\alpha_n))T]^2 4\pi^2} d\alpha_m d\alpha_n \\ + \frac{|\tau|^2}{T^2} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 J_0(2\pi f_{\max} \tau)^2 + \frac{1}{N} \right] - \frac{|\tau|^2}{T^2} J_0(2\pi f_{\max} \tau)^2 \quad (4.41)$$

Para el MSE $M_{\epsilon}^{BE}(\tau)$ tenemos

$$M_{\epsilon}^{BE}(\tau) \triangleq E \{ |\epsilon_r^{BE}(\tau)|^2 \} \\ = V_{\epsilon}^{BE}(\tau) + (m_{\epsilon}^{BE}(\tau))^2 \\ = \left(\frac{|\tau|}{T} r_{\mu\mu}(\tau) \right)^2 + V_{\epsilon}^{BE}(\tau) \quad (4.42)$$

y la norma del error $\overline{M}_{\epsilon}^{BE}(\tau)$ se define como

$$\overline{M}_{\epsilon}^{BE}(\tau) \triangleq \frac{1}{\tau_{\max}} \int_0^{\tau_{\max}} M_{\epsilon}^{BE}(\tau) d\tau \quad (4.43)$$

4.3.4. Cálculo del Error Instantáneo del UE

Para efectos de análisis es imprescindible contar con otro estimador con el cual podamos realizar una comparación con el anterior, tal es el caso del UE. La estimación insesgada es resultado únicamente de limitar la longitud de T en la expresión de la Ecuación (4.8), además de cambiar el factor $\frac{1}{T}$ por $\frac{1}{T-|\tau|}$ en donde el parámetro $|\tau|$ es el que elimina el sesgo. Suponiendo ahora que la TACF de la simulación es calculada siguiendo la estimación insesgada, la función de autocorrelación está dada como

$$\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{UE}(\tau) \triangleq \frac{1}{T-|\tau|} \int_{t_0+\frac{|\tau|}{2}}^{t_0+T-\frac{|\tau|}{2}} \hat{\mu}^*(t-\frac{\tau}{2}) \hat{\mu}(t+\frac{\tau}{2}) dt \quad (4.44)$$

para $\tau \in [-T, T]$. Sustituyendo $\hat{\mu}(t)$ de la Ecuación (4.6) en la Ecuación (4.44) y siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para el BE es fácil mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{UE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \left\{j2\pi(f_m + f_n)\frac{\tau}{2}\right\} \\ &\quad \times \exp \left\{j2\pi(f_m - f_n)\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\right\} \frac{\sin(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))}{\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|)} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \left\{j2\pi(f_m + f_n)\frac{\tau}{2}\right\} \\ &\quad \times \exp \left\{j2\pi(f_m - f_n)\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\right\} \text{sinc}(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|)) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Si $n = m$

$$\exp \{j(\theta_n - \theta_n)\} = 1 \quad (4.46)$$

$$\exp \left\{j2\pi(f_n - f_n)\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\right\} = 1 \quad (4.47)$$

$$\text{sinc}(\pi(f_n - f_n)(T - |\tau|)) = 1 \quad (4.48)$$

Por lo que, en este caso, $\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{UE}(\tau)$ se reduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{UE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N c_n^2 \exp \{j2\pi f_n \tau\} \\ &= r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Si $n \neq m$, $\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{UE}(\tau)$ simplemente es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{UE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp \{j(\theta_m - \theta_n)\} \exp \left\{j2\pi(f_m + f_n)\frac{\tau}{2}\right\} \\ &\quad \times \exp \left\{j2\pi(f_m - f_n)\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\right\} \text{sinc}(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|)) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Juntando los resultados de las Ecuaciones (4.49) y (4.50) finalmente llegamos a que $\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}^{UE}(\tau) = r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) + \boldsymbol{\epsilon}_r^{UE}(\tau)$, donde $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ es la TACF definida en la Ecuación (4.8) y $\boldsymbol{\epsilon}_r^{UE}(\tau)$ es igual a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_r^{UE}(\tau) &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \\ &\quad \times \text{sinc}(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|)) \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde $A_{n,m}(\tau)$ es la función definida en la Ecuación (4.24).

4.3.5. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el UE para Simuladores Ergódicos

El valor medio de $\epsilon_r^{UE}(\tau)$ se define como

$$m_{\epsilon}^{UE}(\tau) \triangleq E\{\epsilon_r^{UE}(\tau)\} \quad (4.52)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.51) en la Ecuación (4.52) y siguiendo el mismo procedimiento que en la Sección 4.3.2 tenemos que

$$m_{\epsilon}^{UE}(\tau) = E\left\{\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \times \text{sinc}(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))\right\} = 0 \quad (4.53)$$

La varianza $V_{\epsilon}^{UE}(\tau)$ de $\epsilon_r^{UE}(\tau)$ se define como

$$V_{\epsilon}^{UE}(\tau) \triangleq E\{|\epsilon_r^{UE}(\tau) - m_{\epsilon}^{UE}(\tau)|^2\} \quad (4.54)$$

Como $m_{\epsilon}^{UE}(\tau) = 0$, $V_{\epsilon}^{UE}(\tau)$ se reduce a

$$V_{\epsilon}^{UE}(\tau) = E\{|\epsilon_r^{UE}(\tau)|^2\} \quad (4.55)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.51) en la Ecuación (4.55) aplicando el procedimiento ya conocido tenemos que

$$\begin{aligned} V_{\epsilon}^{UE}(\tau) &= E\left\{\left|\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N c_n c_m \exp(j(\theta_m - \theta_n)) A_{n,m}(\tau) \times \text{sinc}(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))\right|^2\right\} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 \times \text{sinc}^2(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|)) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Para el MSE $M_{\epsilon}^{UE}(\tau)$ y la norma del error $\overline{M}_{\epsilon}^{UE}(\tau)$ del UE, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} M_{\epsilon}^{UE}(\tau) &\triangleq E\{|\epsilon_r^{UE}(\tau)|^2\} \\ &= V_{\epsilon}^{UE}(\tau) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 \times \text{sinc}^2(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|)) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\overline{M}_{\epsilon}^{UE}(\tau) \triangleq \frac{1}{\tau_{max}} \int_0^{\tau_{max}} M_{\epsilon}^{UE}(\tau) d\tau \quad (4.58)$$

4.3.6. Momentos Estadísticos de la Estimación del Error con el UE para Simuladores de SOC no Ergódicos

A partir del término de error $\epsilon_r^{UE}(\tau)$ descrito en la Ecuación (4.51), la media del error se define como $m_\epsilon^{UE}(\tau) \triangleq E\{\epsilon_r^{UE}(\tau)\}$ y, aplicando en mismo procedimiento que en la Sección anterior, se puede demostrar que

$$m_\epsilon^{UE}(\tau) = 0 \quad (4.59)$$

La varianza $V_\epsilon^{UE}(\tau)$ de $\epsilon_r^{UE}(\tau)$ se define como $V_\epsilon^{UE}(\tau) \triangleq E\{|\epsilon_r^{UE}(\tau) - m_\epsilon^{UE}(\tau)|^2\}$ y como $m_\epsilon^{UE}(\tau) = 0$, $V_\epsilon^{UE}(\tau)$ se reduce a $V_\epsilon^{UE}(\tau) = E\{|\epsilon_r^{UE}(\tau)|^2\}$. Por lo que sustituyendo la Ecuación (4.51) y aplicando el procedimiento ya conocido tenemos

$$V_\epsilon^{UE}(\tau) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 E\{\text{sinc}^2(\pi(f_m - f_n)(T - |\tau|))\} \quad (4.60)$$

Como $f_m = f_{\max} \cos(\alpha_m)$ y $f_n = f_{\max} \cos(\alpha_n)$ y aplicando el teorema del valor esperado de una función de dos variables aleatorias [51] la expresión anterior se reduce a

$$V_\epsilon^{UE}(\tau) = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (c_n c_m)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sinc}^2(\pi f_{\max}(\cos(\alpha_m) - \cos(\alpha_n))(T - |\tau|))}{4\pi^2} d\alpha_m d\alpha_n \quad (4.61)$$

Para el MSE $M_\epsilon^{UE}(\tau)$ tenemos

$$\begin{aligned} M_\epsilon^{UE}(\tau) &\triangleq E\{|\epsilon_r^{UE}(\tau)|^2\} \\ &= V_\epsilon^{UE}(\tau) \end{aligned} \quad (4.62)$$

y la norma del error $\overline{M}_\epsilon^{UE}(\tau)$ se define como

$$\overline{M}_\epsilon^{UE}(\tau) \triangleq \frac{1}{\tau_{\max}} \int_0^{\tau_{\max}} M_\epsilon^{UE}(\tau) d\tau \quad (4.63)$$

4.4. Resultados

Las gráficas mostradas en las Figuras 4.2, 4.3, 4.6, 4.8 y 4.10 son reproducción de resultados numéricos que se presentaron originalmente en [44] y que son de utilidad para realizar la comparativa con los resultados de las Figuras 4.4, 4.5, 4.7, 4.9 Y 4.11 que representan contribuciones de nuestro trabajo de investigación.

En las Figuras 4.2 y 4.4 se muestra una comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF de un modelo de simulación ergódico y un modelo de simulación

no ergódico aplicando el BE, en las Figuras 4.3 y 4.5 se muestra una comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF de un modelo de simulación ergódico y un modelo de simulación no ergódico aplicando el UE. Las curvas teóricas fueron generadas evaluando la expresión $\mathbf{r}_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) = r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau) + \epsilon_r(\tau)$. Las curvas empíricas de $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ aplicando el BE y el UE fueron calculadas con la ayuda de la función `xcorr` de MATLAB®

En las Figuras 4.6 y 4.7 se muestra una comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la media del error observado en la estimación de la TACF de un modelo de simulación ergódico y un modelo de simulación no ergódico aplicando el BE y el UE. Sólo graficamos la curva teórica de $m_\epsilon^{BE}(\tau)$ ya que $m_\epsilon^{UE}(\tau) = 0$. Las curvas empíricas de $m_\epsilon(\tau)$ aplicando el BE y el UE fueron generadas promediando el error de 1000 estimaciones de $r_{\hat{\mu}\hat{\mu}}(\tau)$ con la ayuda de la función `mean` de MATLAB®.

En las Figuras 4.8 y 4.9 se muestra una comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la varianza del error observado en la estimación de la TACF de un modelo de simulación ergódico y un modelo de simulación no ergódico aplicando el BE y el UE. Las curvas empíricas de $V_\epsilon(\tau)$ se generaron bajo las mismas condiciones que para las curvas empíricas de $m_\epsilon(\tau)$. Las curvas empíricas de $V_\epsilon(\tau)$ del modelo de simulación no ergódico aplicando el BE y el UE fueron calculadas con la ayuda de la función `integral2` y `besselj` de MATLAB®.

Finalmente, en las Figuras 4.10 y 4.11 se muestra una comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la norma del error cuadrático medio observado en la estimación de la TACF de un modelo de simulación ergódico y un modelo de simulación no ergódico aplicando el BE y el UE. Las curvas empíricas de $\overline{M}_\epsilon(\tau)$ aplicando el BE y el UE fueron calculadas con la ayuda de la función `quad2d`, `trapez` y `besselj` de MATLAB®.

Para todas las Figuras la simulación se realizó tomando en cuenta dos casos: Cuando la longitud de las formas de onda generados por el simulador es relativamente pequeño ($T = 0.1$) y para cuando la longitud de las formas de onda generados por el simulador es relativamente grande ($T = 1$).

Con respecto a las Figuras 4.2 y 4.3 del modelo de simulación ergódico aplicando tanto el BE como el UE podemos concluir:

1. Las estimaciones de la TACF cambian aleatoriamente de una realización a otra.
2. Cuando la longitud de las formas de onda es suficientemente pequeño ($T = 0.1$), la TACF teórica y empírica no encajan bien con la TACF ideal (cuando $T \rightarrow \infty$).
3. Cuando la longitud de las formas de onda es suficientemente grande ($T = 1$), la TACF teórica y empírica encajan muy bien con la TACF ideal.
4. La TACF ideal no cambia aleatoriamente de una realización a otra pues no depende de fases aleatorias.

Con respecto a las Figuras 4.4 y 4.5 del modelo de simulación no ergódico aplicando tanto el BE como el UE podemos concluir:

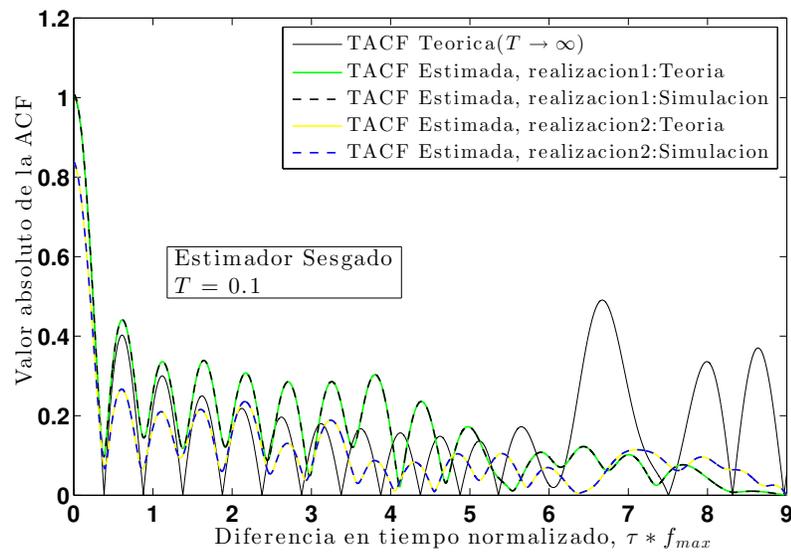
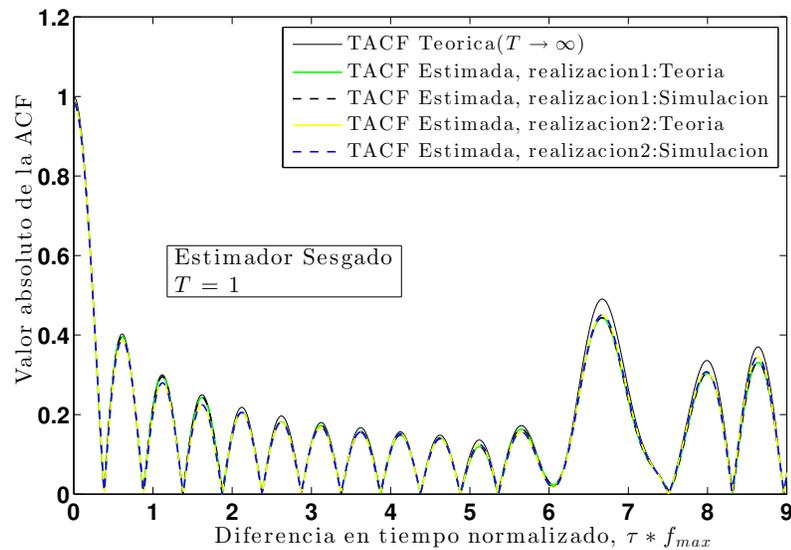
(a) TACF del modelo de simulación de SOC AE aplicando el BE con $T = 0.1$.(b) TACF del modelo de simulación de SOC AE aplicando el BE con $T = 1$.

Figura 4.2: Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el BE.

1. Se corrobora que los resultados analíticos obtenidos de la TACF son correctos ya que son iguales a los que se obtienen realizando la simulación del proceso.
2. Las estimaciones de la TACF cambian aleatoriamente de una realización a otra.

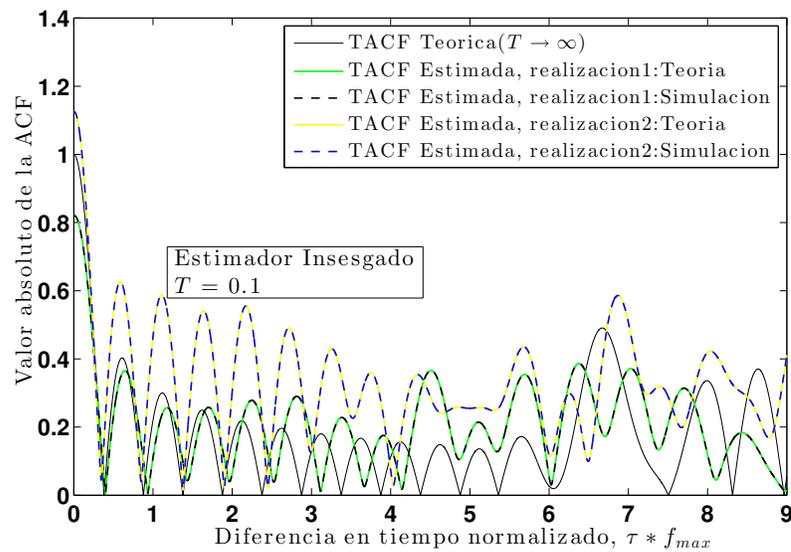
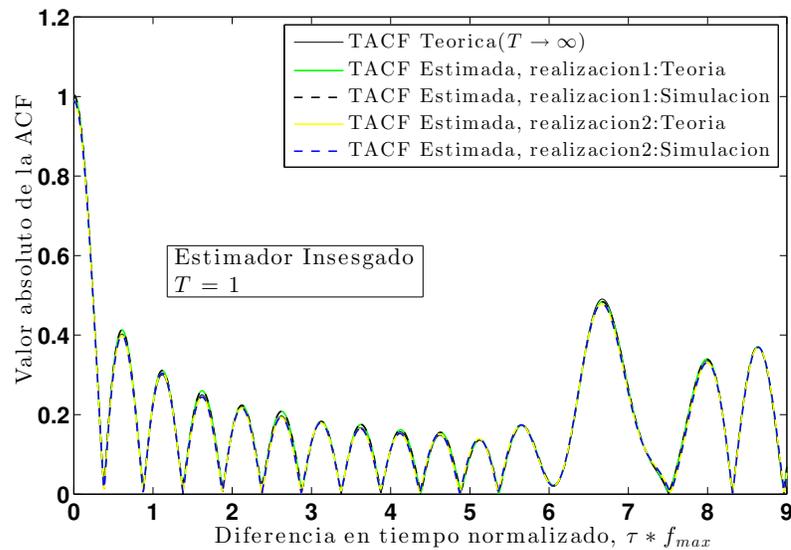
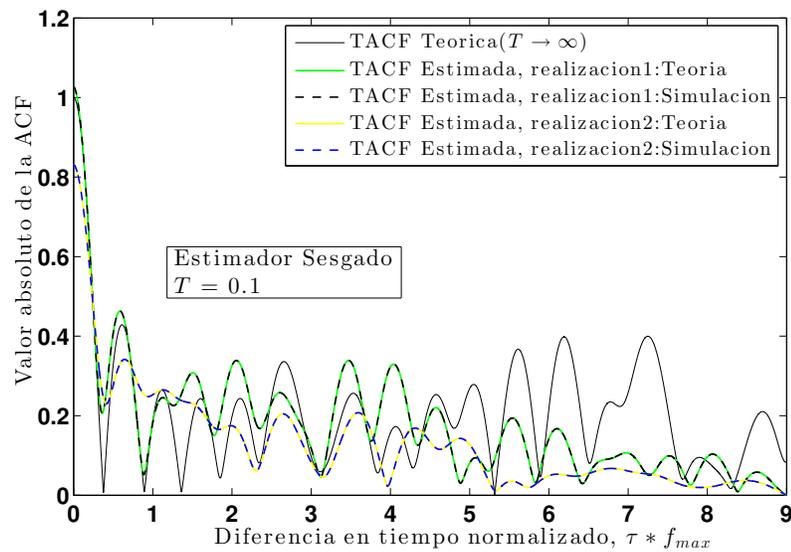
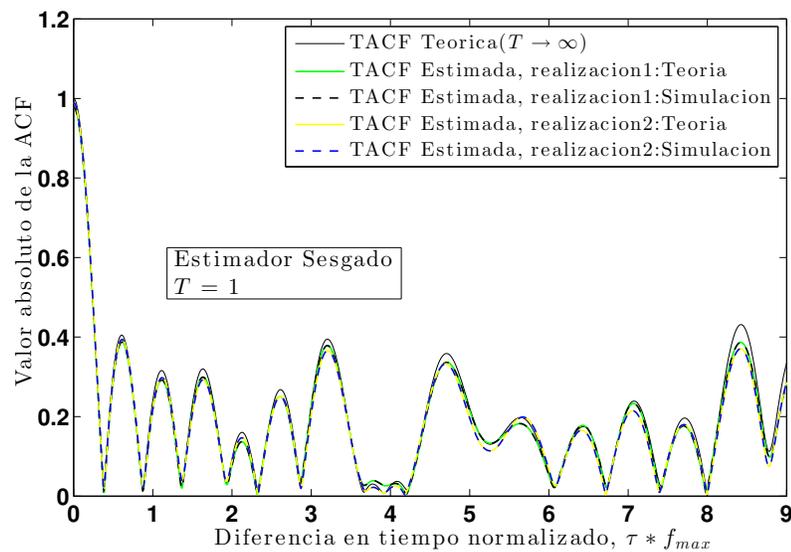
(a) TACF del modelo de simulación de SOC AE aplicando el UE con $T = 0.1$.(b) TACF del modelo de simulación de SOC AE aplicando el UE con $T = 1$.

Figura 4.3: Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el UE.

3. Cuando la longitud de las formas de onda es suficientemente pequeño ($T = 0.1$), la TACF teórica y empírica no están en concordancia con la TACF ideal.
4. Cuando la longitud de las formas de onda es suficientemente grande ($T = 1$), la TACF



(a) TACF del modelo de simulación de SOC no AE aplicando el BE con $T = 0.1$.

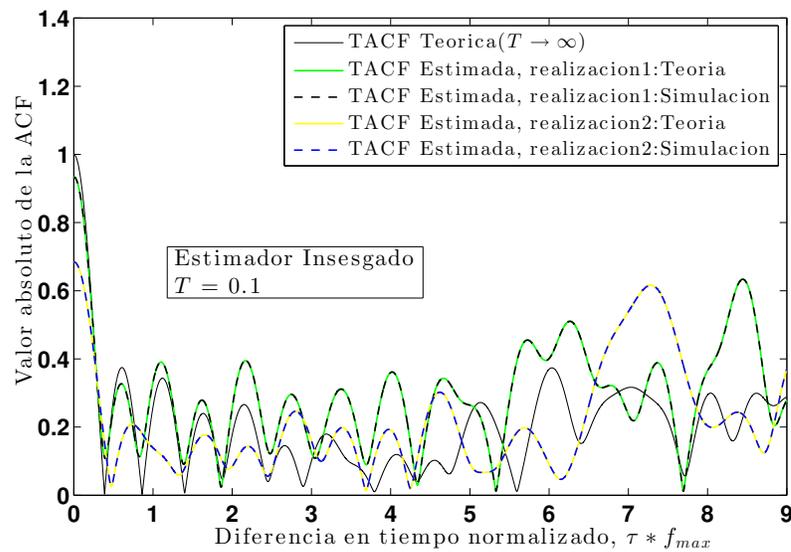


(b) TACF del modelo de simulación de SOC no AE aplicando el BE con $T = 1$.

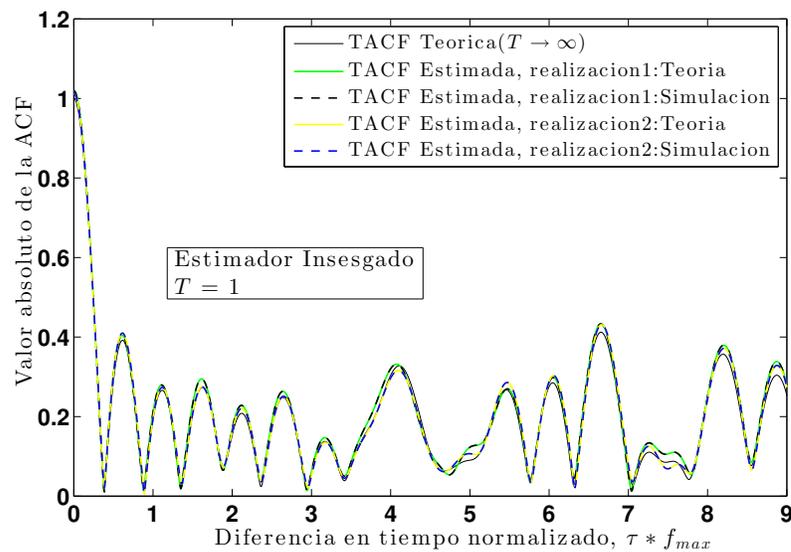
Figura 4.4: Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el BE.

teórica y empírica están en concordancia con la TACF ideal.

5. La TACF ideal cambia aleatoriamente de una realización a otra pues depende de



(a) TACF del modelo de simulación de SOC no AE aplicando el UE con $T = 0.1$.

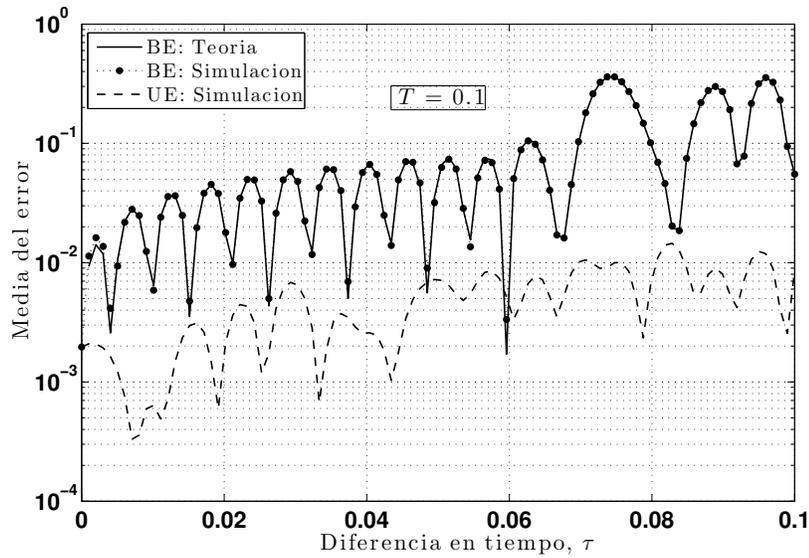


(b) TACF del modelo de simulación de SOC no AE aplicando el UE con $T = 1$.

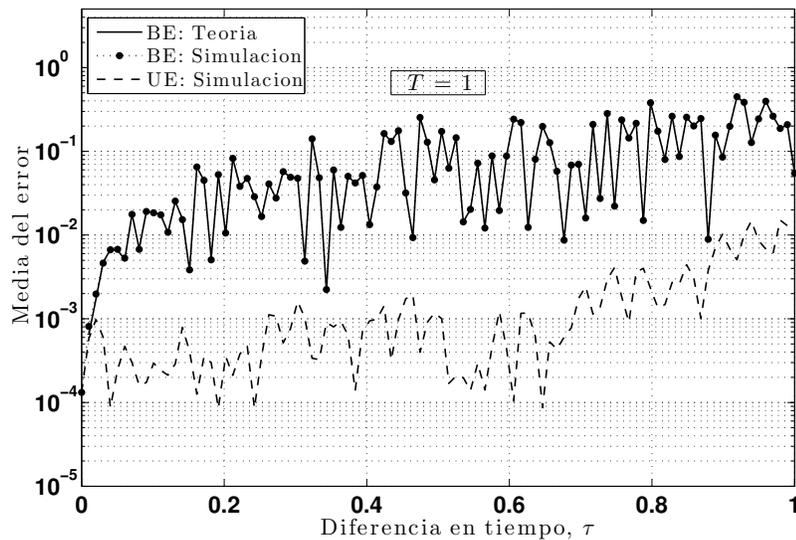
Figura 4.5: Comparativa entre las estimaciones teóricas y empíricas de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el UE.

frecuencias aleatorias.

Con respecto a la Figura 4.6 del modelo de simulación ergódico podemos concluir:



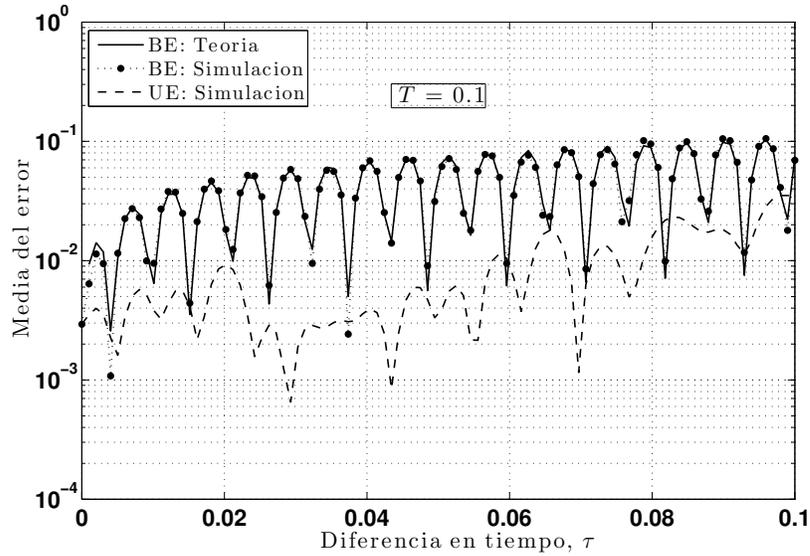
(a) Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el BE y UE con $T = 0.1$.



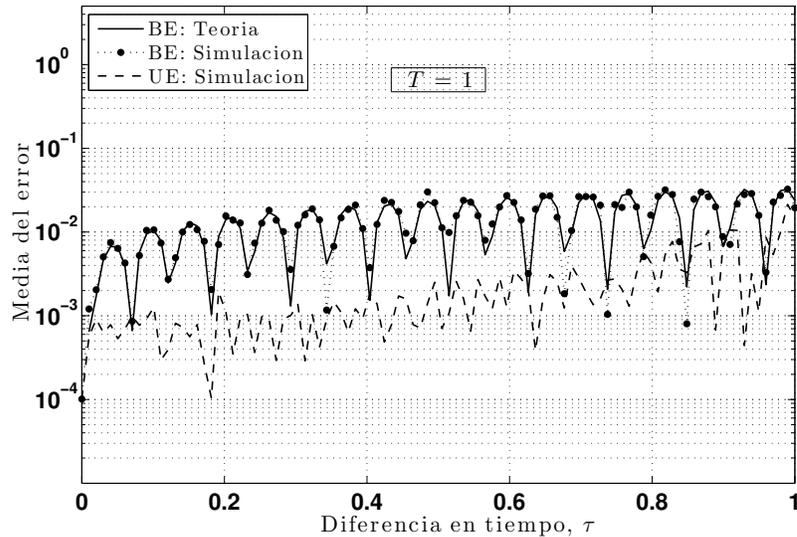
(b) Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el BE y UE con $T = 1$.

Figura 4.6: Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC AE aplicando el BE y el UE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$.

1. Muestra claramente que el error medio de la TACF aplicando el BE es distinto de cero tanto teórica como empíricamente y estos encajan muy bien entre sí.



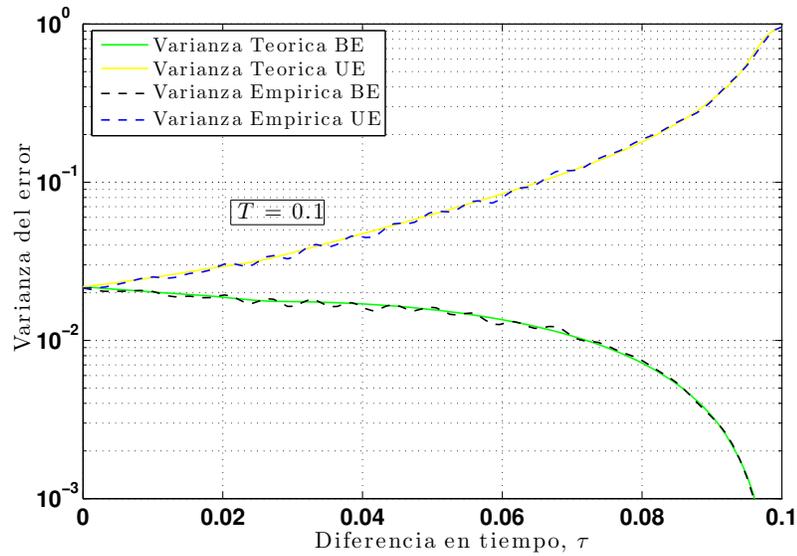
(a) Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el BE y UE con $T = 0.1$.



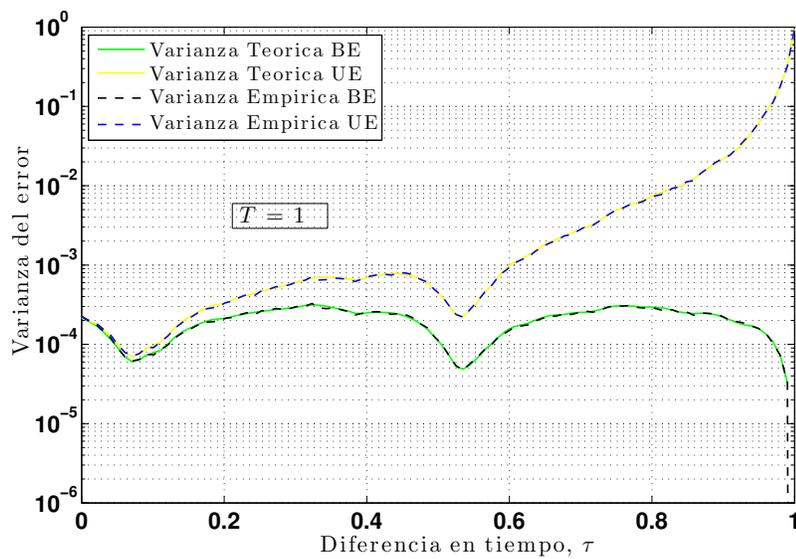
(b) Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el BE y UE con $T = 1$.

Figura 4.7: Error medio de la TACF del modelo de simulación de canal de SOC no AE aplicando el BE y el UE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$.

2. Muestra claramente que el error medio teórico de la TACF aplicando el UE difiere del error medio empírico de la TACF aplicando el UE ya que en la teoría el error medio



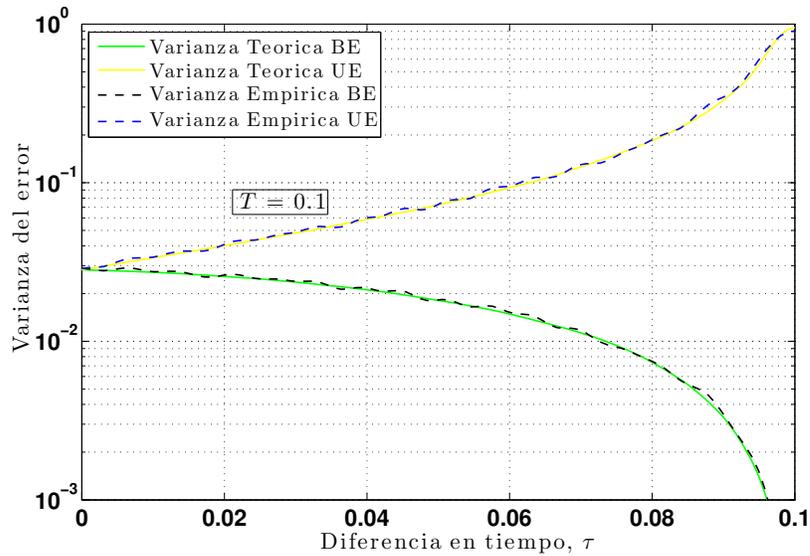
(a) Varianza del error del modelo ergódico aplicando el BE y UE con $T = 0.1$.



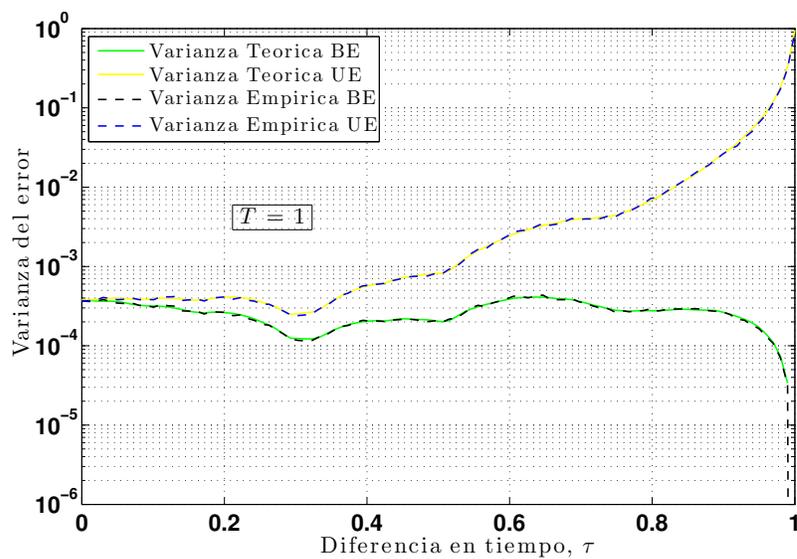
(b) Varianza del error del modelo ergódico aplicando el BE y UE con $T = 1$.

Figura 4.8: Varianza del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$.

de la TACF aplicando UE es cero pero realizando la simulación del proceso es distinto de cero lo cual se debe a errores numéricos que introduce el equipo de cómputo.



(a) Varianza del error del modelo no-ergódico aplicando el BE y UE con $T = 0.1$.



(b) Varianza del error del modelo no-ergódico aplicando el BE y UE con $T = 1$.

Figura 4.9: Varianza del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC no AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$.

- Las estimaciones del error medio empírico de la TACF aplicando el BE y el UE son cantidades aleatorias y van en aumento.

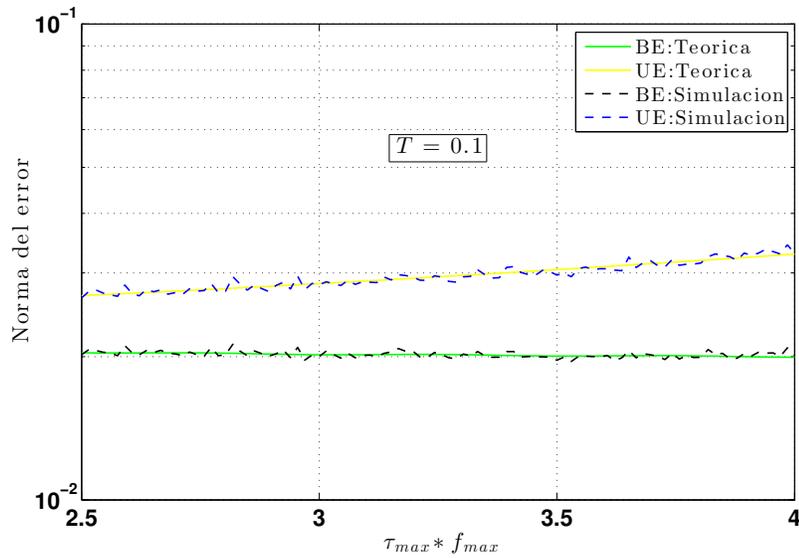
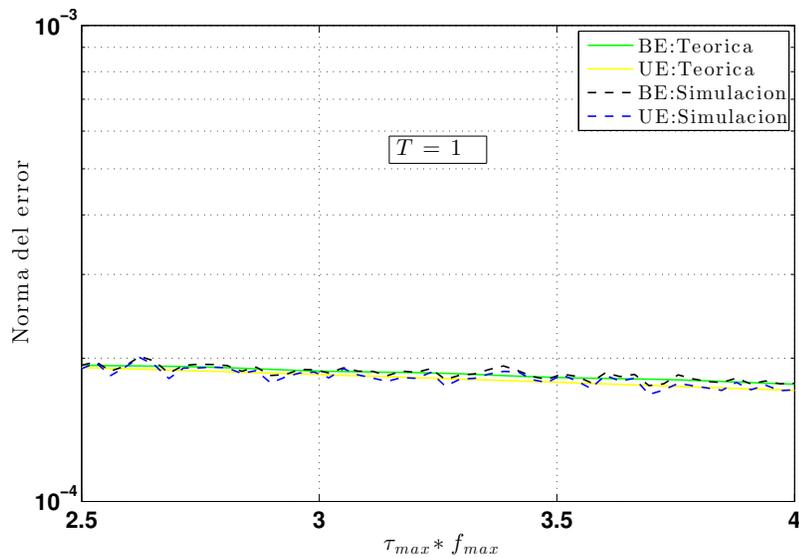
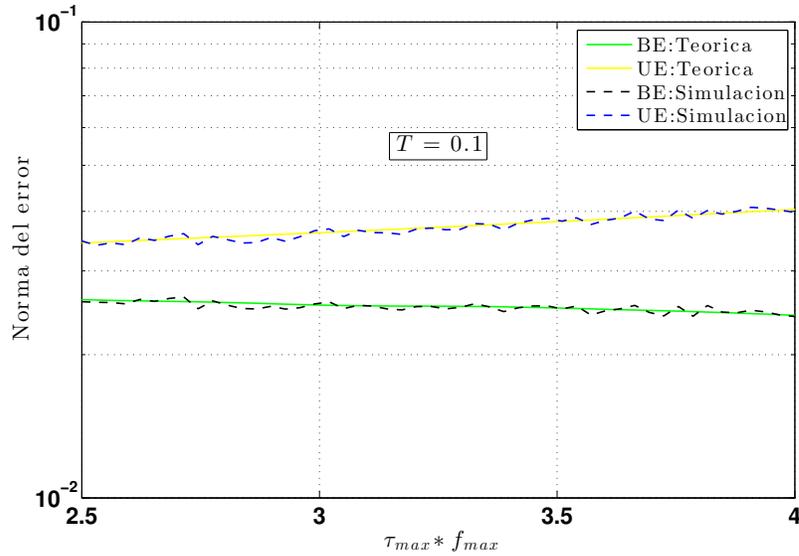
(a) Norma del error del modelo ergódico aplicando el BE y UE con $T = 0.1$.(b) Norma del error del modelo ergódico aplicando el BE y UE con $T = 1$.

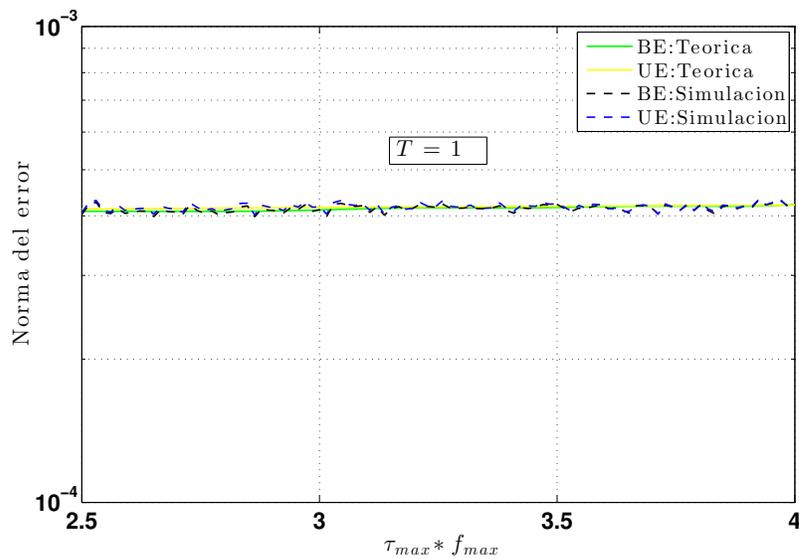
Figura 4.10: Norma del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$.

- La estimación del error medio teórico de la TACF aplicando el BE es una cantidad constante y va aumentando.

Con respecto a la Figura 4.7 del modelo de simulación no ergódico podemos concluir:



(a) Norma del error del modelo no-ergódico aplicando el BE y UE con $T = 0.1$.



(b) Norma del error del modelo no-ergódico aplicando el BE y UE con $T = 1$.

Figura 4.11: Norma del error observado aplicando los estimadores BE y UE para calcular la TACF de un modelo de simulación de canal de SOC no AE considerando formas de onda de tamaño $T = 0.1$ y $T = 1$.

1. Proporciona evidencia de que los resultados analíticos obtenidos del error medio de la TACF aplicando el BE son correctos ya que están en concordancia con los que se obtienen realizando la simulación del proceso.

2. Muestra claramente que el error medio de la TACF aplicando el BE es distinto de cero tanto teórica como empíricamente.
3. Muestra claramente que el error medio teórico de la TACF aplicando el UE difiere del error medio empírico de la TACF aplicando el UE ya que en la teoría el error medio de la TACF aplicando UE es cero pero realizando la simulación del proceso es distinta de cero lo cual se debe a errores numéricos que introduce el equipo de cómputo.
4. Las estimaciones del error medio empírico de la TACF aplicando el BE y el UE son cantidades aleatorias y van decreciendo.
5. La estimación del error medio teórico de la TACF aplicando el BE es una cantidad constante y va decreciendo.

Con respecto a la Figura 4.8 del modelo de simulación ergódico podemos concluir:

1. Muestra claramente que la varianza teórica de la TACF aplicando el BE y el UE encaja muy bien con la varianza empírica de la TACF aplicando el BE y el UE.
2. Con respecto al rendimiento de los estimadores, se puede observar que el BE es el estimador con la varianza más pequeña.
3. Mientras que la varianza del BE va disminuyendo, la varianza del UE va en aumento.
4. $V_{\epsilon}^{BE}(0) = V_{\epsilon}^{UE}(0)$ y resulta consistente con las Ecuaciones (4.28) y (4.54).

Con respecto a la Figura 4.9 del modelo de simulación no ergódico podemos concluir:

1. Muestra claramente que la varianza teórica de la TACF aplicando el BE y el UE está en concordancia con la varianza empírica de la TACF aplicando el BE y el UE.
2. Con respecto al rendimiento de los estimadores, se puede observar que el BE es el estimador con la varianza más pequeña.
3. Mientras que la varianza del BE va disminuyendo, la varianza del UE va en aumento.
4. $V_{\epsilon}^{BE}(0) = V_{\epsilon}^{UE}(0)$ y resulta consistente con las Ecuaciones (4.40) y (4.60).

Con respecto a la Figura 4.10 del modelo de simulación ergódico podemos concluir:

1. Con respecto al desempeño de los estimadores, se puede observar que el BE es el estimador con la norma del error de la TACF más pequeña para cuando $T = 0.1$.
2. Cuando $T = 0.1$, la norma del error de la TACF aplicando el UE va en aumento a diferencia de la norma del error de la TACF aplicando el BE que va decreciendo.

3. Cuando $T = 1$ pasa lo contrario, el UE es el estimador con la norma del error de la TACF más pequeña.
4. Cuando $T = 1$, las normas del error de la TACF aplicando el BE y el UE van decreciendo, pero la norma del error de UE lo hace con más rapidez.
5. Aunque cuando $T = 1$ el UE es el estimador con la norma del error de la TACF más pequeña, podemos decir que el BE y el UE tienen el mismo desempeño ya que la diferencia entre las curvas es demasiado pequeña.

Con respecto a la Figura 4.11 del modelo de simulación no ergódico podemos concluir:

1. Con respecto al desempeño de los estimadores, se puede observar que el BE es el estimador con la norma del error de la TACF más pequeña.
2. Cuando $T = 0.1$, la norma del error de la TACF aplicando el UE va en aumento a diferencia de la norma del error de la TACF aplicando el BE que va decreciendo.
3. Cuando $T = 1$, las normas del error de la TACF aplicando el BE y el UE van creciendo.
4. Aunque cuando $T = 1$ el BE es el estimador con la norma del error de la TACF más pequeña, podemos decir que el BE y el UE tienen el mismo desempeño ya que la diferencia entre las curvas es demasiado pequeña.

En general con respecto al modelo de simulación ergódico y no ergódico podemos concluir:

1. Que el desempeño del modelo de simulación ergódico tanto para TACF como para los momentos (Media, Varianza y Norma del Error) está por encima del desempeño del modelo de simulación no ergódico.

4.5. Conclusiones

En este Capítulo, mostramos que la exactitud de los modelos de simulación de SOC para emular la TACF depende de la longitud que tengan las formas de onda generadas por el simulador. Demostramos que cuando la longitud de las formas de onda es muy pequeña las degradaciones en la TACF son mucho más grandes que cuando se considera un valor de T relativamente grande. Con respecto a los simuladores no ergódicos podemos concluir que la TACF ideal es diferente en cada realización del proceso en contraste con los simuladores ergódicos que su TACF ideal es la misma en cualquier para cualquier realización. También podemos concluir que los modelos de simulación ergódicos tienen un mejor desempeño en comparación con los simuladores no ergódicos tanto en la teoría como

en la práctica. Observamos que independientemente del simulador de SOC que se utilice de los tomados para el estudio, la varianza del BE tiende a disminuir y la varianza del UE tiende a aumentar. Finalmente pudimos constatar que el BE mejora en desempeño al UE independientemente del modelo de simulación de SOC que se utilice de los tomados para el estudio.

Capítulo 5

Conclusiones y Problemas Abiertos

5.1. Conclusiones

Las principales contribuciones y conclusiones de este trabajo de investigación se pueden resumir como sigue:

- Analizamos cuáles de las propiedades de AE, ME y WSS exhibe cada Clase de modelo de simulación de SOC, de lo cual concluimos que sólo la Clase II de modelos de simulación de SOC posee las tres propiedades, que las Clases II, IV, VI y VIII tienen las propiedades de ME y WSS las cuales tienen en común que sus fases son aleatorias y que las Clases III, V y VII estrictamente no poseen ninguna de las propiedades, estas últimas Clases tienen en común que sus fases son deterministas.
- Presentamos un análisis del error observado cuando la TACF, de procesos ergódicos y no ergódicos, es calculada a partir de funciones muestrales de procesos estocásticos de SOC cuyos conjuntos índices se extienden sobre un intervalo finito. De ahí concluimos que los simuladores de SOC ergódicos tienen un mejor desempeño tanto en la teoría como en la práctica. Entonces en una sola realización, aunque la longitud de las formas de onda sea finita, podemos esperar que los simuladores de SOC nos den una mejor aproximación a la ACF que deseamos emular.
- Obtuvimos expresiones cerradas de los momentos estadísticos de la estimación del error instantáneo de la TACF para los modelo de simulación de SOC no ergódico aplicando tanto el BE como el UE.
- Analizamos el desempeño tanto del BE como del UE en términos de su exactitud. Concluimos que el BE tiene un mejor desempeño con respecto al UE para valores de T relativamente pequeños y que conforme el valor de T aumenta, el desempeño de ambos estimadores es prácticamente el mismo.

5.2. Problemas Abiertos

- Realizar un análisis del impacto que tiene limitar la longitud de las formas de onda en la probabilidad de error.
- Encontrar el valor óptimo de T para los modelos de simulación de SOC en base al análisis del error que se presentó en este trabajo de investigación.
- Utilizar los resultados de este trabajo de tesis para diseñar un nuevo método de parametrización que dé buenos resultados incluso cuando se hace una sola realización del proceso.

Bibliografía

- [1] M. Dohler, R. W. Heath-Jr., A. Lozano, C. B. Papadias, and R. A. Valenzuela, “Is the PHY Layer Dead?,” *IEEE Commun. Mag*, vol. 49, no. 4, April 2011.
- [2] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. Prentice-Hall, Inc, Second ed., 2001.
- [3] 3GPP-3GPP2, *Spatial Channel Model Ad-hoc Group 3GPP TR 25.996., Spatial Channel Model for Multiple Input Multiple Output (MIMO) Simulations*. v7.0.0, 2003-09.
- [4] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu, “Autoregressive Modeling for Fading Channel Simulation,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 4, July 2005.
- [5] P. Sharma, “Time-Series Model for Wireless Fading Channels in Isotropic and Non-Isotropic Scattering Environments,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, 2005.
- [6] J. I. Smith, “A Computer Generated Multipath Fading Simulation for Mobile Radio,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 24, no. 3, August 1975.
- [7] R. B. Ertel and J. H. Reed, “Generation of Two Equal Power Correlated Rayleigh Fading Envelopes,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 2, no. 10, October 1998.
- [8] K. W. Yip and T. S. Ng, “Karhunen-Loève Expansion of the WSSUS Channel Output and its Application to Efficient Simulation,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 15, no. 4, May 1997.
- [9] R. H. Clarke, “A Statistical Theory of Mobile Radio Reception,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 47, July 1968.
- [10] G. L. Stüber, *Principles of Mobile Communication*. Kluwer Academic, Third ed., 2011.
- [11] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, Fourth ed., 2002.
- [12] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu, “Accurate Simulation of Multiple Cross-correlated Rician Fading Channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 11, November 2004.

- [13] N. C. Beaulieu and M. L. Merani, "Generation of Multiple Rayleigh Fading Sequences with Specified Cross-correlations," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 15, no. 5, September 2004.
- [14] G. E. Corazza, V. Degli-Esposti, M. Frullone, and G. Riva, "A Characterization of Indoor Space and Frequency Diversity Ray-tracing Modeling," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 14, no. 3, April 1996.
- [15] D. J. Young and N. C. Beaulieu, "The Generation of Correlated Rayleigh Random Variates by Inverse Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, July 2000.
- [16] S. O. Rice, "Mathematical Analysis of Random Noise," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 23, no. 3, July 1944.
- [17] S. O. Rice, "Mathematical Analysis of Random Noise," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 24, no. 1, January 1945.
- [18] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. Wiley-IEEE Press, Second ed., 1994.
- [19] M. Pätzold, U. Killat, and F. Laue, "A Deterministic Digital Simulation Model for Suzuki Processes with Application to a Shadowed Rayleigh Land Mobile Radio Channel," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 45, no. 2, May 1996.
- [20] M. Pätzold, *Mobile Fading Channels*. John Wiley and Sons, 2002.
- [21] C. Xiao, J. Wu, S. Y. Leong, Y. R. Zheng, and K. B. Letaief, "A Discrete-Time Model for Triply Selective MIMO Rayleigh Fading Channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 3, no. 5, 2004.
- [22] C. S. Patel, G. L. Stüber, and T. G. Pratt, "Comparative Analysis of Statistical Models for the Simulation of Rayleigh Faded Cellular Channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 53, no. 6, 2005.
- [23] A. Alimohammad and B. F. Cockburn, "Modeling and Hardware Implementation Aspects of Fading Channel Simulators," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 4, 2008.
- [24] P. Höher, "A Statistical Discrete-time Model for the WSSUS Multipath Channel," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 41, no. 4, November 1992.
- [25] K. W. Yip and T. S. Ng, "Efficient Simulation of Digital Transmission Over WSSUS Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, no. 12, December 1995.
- [26] C. X. Wang, M. Pätzold, and Q. Yao, "Stochastic Modelling and Simulation of Frequency-correlated Wideband Fading Channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 3, May 2007.

- [27] J. K. Han, J. G. Yook, and H. K. Park, "A Deterministic Channel Simulation Model for Spatially Correlated Rayleigh Fading," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, no. 2, February 2002.
- [28] M. Pätzold and N. Youssef, "Modelling and Simulation of direction-Selective and Frequency-Selective Mobile Radio Channels," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, no. 2, February 2002.
- [29] M. Pätzold and B. Hogstad, "A Space-time Simulator for MIMO Channels Based on the Geometrical One-ring Scattering Model," *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, vol. 4, no. 7, November 2004.
- [30] M. Pätzold, B. Hogstad, and N. Youssef, "Modeling, Analysis, and Simulation of MIMO Mobile-to-Mobile Fading Channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 2, February 2008.
- [31] W. A. T. Kotterman, G. F. Pedersen, and K. Olsen, "Diversity Properties of Multiantenna Small Handheld Terminals," *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2004, no. 9, 2004.
- [32] A. Abdi, J. A. Barger, and M. Kaveh, "A Parametric Model for the Distribution of the Angle of Arrival and the Associated Correlation Function and Power Spectrum at the Mobile Station," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 51, no. 3, May 2002.
- [33] X. Zhao, J. Kivinen, P. Vainikainen, and K. Skog, "Characterization of Doppler Spectra for Mobile Communications at 5.3 GHz," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 52, no. 1, January 2003.
- [34] N. Blaunstein and Y. Ben-Shimol, "Spectral Properties of Signal Fading and Doppler Spectra Distribution in Urban Mobile Communication Links," *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, vol. 6, no. 1, February 2006.
- [35] S. A. Mitilneos, P. K. Varlamos, and C. N. Capsalis, "A Simulation Method for Bit-Error-Rate-Performance Estimation for Arbitrary Angle of Arrival Channel Models," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 46, no. 2, April 2004.
- [36] M. Pätzold and B. Talha, "On the Statistical Properties of Sum-of-Cisoids-Based Mobile Radio Channel Models," in *Proc. 10th International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC'07)*, December 2007.
- [37] C. A. Gutiérrez, *Channel Simulation Models for Mobile Broadband Communication Systems*. Doctoral Dissertations at the University of Agder 16, 2009.

- [38] Y. R. Zheng, "A Non-Isotropic Model for Mobile-to-Mobile Fading Channel Simulations," in *Proc. 2006 IEEE Conference on Military Communications (MILCOM'06)*, 2006.
- [39] C. A. Gutiérrez and M. Pätzold, "The Generalized Method of Equal Areas for the Design of Sum-of-Cisoids Simulators for Mobile Rayleigh Fading Channels with Arbitrary Doppler Spectra," *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, June 2011.
- [40] W. R. Braun and U. Dersch, "A Physical Mobile Radio Channel Model," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, no. 2, May 1991.
- [41] J. D. Durgin, *Space-Time Wireless Channels*. Prentice-Hall, Inc, 2003.
- [42] S. R. Saunders and A. Aragón-Savala, *Antennas and Propagation for Wireless Communication Systems*. John Wiley and Sons, Second ed., 2007.
- [43] B. O. Hogstad, C. A. Gutiérrez, M. Pätzold, and P. M. Crespo, "Classes of Sum-of-Cisoids Processes and their Statistics for the Modeling and Simulation of Mobile Fading Channels," *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2013.
- [44] C. A. Gutiérrez, H. Rodríguez, and M. Miranda-Burgos, "Analysis of Error in the Estimation of the Temporal ACF of Ergodic Sum-of-Cisoids Simulators for Mobile Fading Channels," in *Proc. 2011 Int. Conf. on Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS 2011)*, December 2011.
- [45] C. A. Gutiérrez and M. Pätzold, "The Design of Sum-of-Cisoids Rayleigh Fading Channel Simulators Assuming Non-Isotropic Scattering Conditions," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 9, no. 4, April 2010.
- [46] C. A. Gutiérrez, *Análisis y simulación de CDMA con factor de esparcimiento variable ortogonal sobre modulación multiportadora, como técnica de acceso en redes inalámbricas de área local*. Tesis de Maestría CICESE, 2005.
- [47] A. Leon-Garcia, *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*. Prentice-Hall, Inc, Second ed., 1994.
- [48] W. Y. C. Lee, *Mobile Cellular Communications*. McGraw-Hill, 1989.
- [49] J. D. Parsons, *The Mobile Radio Propagation Channel*. John Wiley and Sons, Second ed., 2000.
- [50] K. V. Mardia and P. E. Jupp, *Directional Statistics*. John Wiley and Sons, 1999.

- [51] R. D. Yates and G. D. J., *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*. John Wiley and Sons, Second ed., 2005.
- [52] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Seventh ed., 2007.
- [53] T. MathWorks, “Electronic references,” <http://www.mathworks.com/>.
- [54] T. Aulin, “A Modified Model for the Fading Signal at a Mobile Radio Channel,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-28, no. 3, August 1979.
- [55] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, and J. C. S. Santos-Filho, “Nakagami-m Phase-Envelope Joint Distribution,” *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 5, March 2005.
- [56] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista, and L. G. de Resende-Guedes, “On Higher Order Statistics of the Nakagami-m Distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, no. 3, May 1999.
- [57] M. Nakagami, “The m-distribution - A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading,” In *W. C. Hoffman: Statistical Methods of Radio Wave Propagation*, 1960.
- [58] A. F. Molisch, *Wireless Communications*. John Wiley and Sons, 2005.
- [59] S. Roy, J. R. Foerster, V. S. Somayazulu, and D. G. Leeper, “Ultrawideband Radio Design: The Promise of High-Speed, Short-Range Wireless Connectivity,” *Proc. IEEE*, vol. 92, no. 2, February 2004.
- [60] G. L. Turin, *Communication Through Noisy, Random Multipath Channels*. Thesis (Sc.D.) Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering, May 1956.
- [61] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles Practice*. Prentice-Hall, Inc, second edition ed., 2002.
- [62] H. Hashemi, “The Indoor Radio Propagation Channel,” *Proc. IEEE*, vol. 81, no. 7, July 1993.
- [63] B. H. Fleury and P. E. Leuthold, “Radiowave Propagation in Mobile Communications: An Overview of European Research,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 34, 1996.
- [64] C. A. Gutiérrez and M. Pätzold, “Sum-of-Sinusoids-Based Simulation of Flat-Fading Wireless Propagation Channels Under Non-Isotropic Scattering Conditions,” In *Proc. 50th IEEE Global Communications Conference (Globecom 2007)*, November 2007.

- [65] A. Zajić and G. Stüber, “Space-Time Correlated Mobile-to-Mobile Channels: Modeling and Simulation,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 2, March 2008.
- [66] H. Zhang, D. Yuan, M. Pätzold, Y. Wu, and V. Nguyen, “A Novel Wideband Space-Time Channel Simulator Based on the Geometrical One-Ring Model with Applications in MIMO-OFDM Systems,” *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, vol. 10, no. 6, June 2010.
- [67] C. E. D. Sterian, Y. Ma, M. Pätzold, I. Banica, and H. He, “New Super-Orthogonal Space-Time Trellis Codes Using Differential M-PSK for Noncoherent Mobile Communication Systems with Two Transmit Antennas,” *Annals of Telecommunications*, July 2010.
- [68] X. Cheng, C. X. Wang, D. I. Laurenson, S. Salous, and A. V. Vasilakos, “New Deterministic and Stochastic Simulation Models for Non-Isotropic Scattering Mobile-to-Mobile Rayleigh Fading Channels,” *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, vol. 11, no. 7, July 2011.
- [69] B. O. Hogstad and M. Pätzold, “On the Stationarity of Sum-of-Cisoids-Based Mobile Fading Channel Simulators,” *In Proc. 67th IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC2008-spring)*, May 2008.
- [70] C. A. Gutiérrez, A. Meléndez, A. Sandoval, and H. Rodríguez, “On the Autocorrelation Ergodic Properties of Sum-of-Cisoids Rayleigh Fading Channel Simulators,” *In Proc. European Wireless Conference(EW’2011)*, April 2011.
- [71] C. A. Gutiérrez, A. Meléndez, A. Sandoval, and H. Rodríguez, “A Study on the Wide-Sense Stationarity and Mean Ergodicity of SOC Rayleigh Fading Channel Simulators,” *Research in Computing Science*, vol. 52, 2011.
- [72] C. A. Gutiérrez, “On the Correlation Properties of the Squared Envelope of Ergodic Sum-of-Cisoids Rayleigh Fading Channel Simulators,” *In Proc. 2010 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC’10)*, 2010.
- [73] M. Pätzold, U. Killat, F. Laue, and Y. Li, “On the Statistical Properties of Deterministic Simulation Models for Mobile Fading Channels,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 47, no. 1, February 1998.
- [74] C. A. Gutiérrez and M. Pätzold, “The Riemann Sum Method for the Design of Sum-of-Cisoids Simulators for Rayleigh Fading Channels in Non-Isotropic Scattering Environments,” *International Conference on Ultra Modern Telecommunications and Workshops 2009 (ICUMT’09)*, October 2009.
- [75] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, “Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions,” *SIAM J. Optimization*, vol. 9, no. 1, December 1998.